

平成 20 年度 教育・研究活動報告

準研究員*1 佐藤 弘康

(1) 研究の概要

n 次元 Hadamard 多様体 (X, g) に対し, X の理想境界とよばれる $(n-1)$ 次元コンパクト多様体 ∂X が定まる. このとき, $X \cup \partial X$ 上で Dirichlet 問題を考えることができ, この基本解 (Poisson 核) を用いて X から ∂X 上の正値確率測度全体のなす空間 $\mathcal{P}(\partial X)$ への写像 $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ が定義できる. これを Poisson 核写像とよぶことにする.

正値確率測度全体のなす空間には Fisher 情報計量とよばれる Riemann 計量 G が定まる. 伊藤-宍戸は, (X, g) が階数 1 非コンパクト型対称空間のとき, $\varphi: (X, g) \rightarrow (\mathcal{P}(\partial X), G)$ が相似的埋め込みになることを示した. この結果は Poisson 核 $P(x, \theta)$ が幾何学的に定義される Busemann 関数 $B(x, \theta)$ を用いて

$$P(x, \theta) = \exp(-c B(x, \theta)), \quad (x \in X, \theta \in \partial X)$$

と表されることによる (c はある定数). 本年度の研究では, 以下のことを明らかにした;

- (1) Damek-Ricci 空間とよばれる等質 Hadamard 多様体の Busemann 関数を計算し, $\exp(-c B(x, \theta))$ が Poisson 核になることを示した. このことから, Damek-Ricci 空間上の Poisson 核写像も相似的であるがわかる.
- (2) 写像 $\phi: (X, g) \rightarrow (\mathcal{P}(\partial X), G)$ が調和写像であるための必要十分条件を明らかにした.
- (3) φ が相似的で Poisson 核が $P(x, \theta) = \exp(-c B(x, \theta))$ と書けるならば, φ は調和写像である. つまり, φ は極小埋め込みである (したがって, Damek-Ricci 空間上の Poisson 核写像は極小的である).
- (4) 逆に, φ が相似的かつ極小的埋め込みならば, Poisson 核は $P(x, \theta) = \exp(-c B(x, \theta))$ と書ける. このことから, (X, g) は漸近的調和空間かつ可視公理を満たすことがわかる.

(2) 学術論文・プレプリント

- [1] M. Itoh and H. Satoh, *Fisher information geometry of Poisson kernels and heat kernels on Riemannian manifolds*, Proc. 12th International Workshop on Differential Geom., **12** (2008), 1-20.
- [2] M. Itoh, H. Satoh and Y. Shishido, *A note on the Fisher information metric and heat kernels*, Int. J. Pure Appl. Math. **46** (2008), 347-353.
- [3] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, submitted.

*1 平成 21 年 3 月 31 日退職. 平成 21 年 5 月 1 日より, 東京電機大学情報環境学部 助教.

- [4] M. Itoh and H. Satoh, *The Fisher information metric, Poisson kernels and harmonic maps*, in preparation.

(3) 口頭発表

- [1] 熱核, Poisson 核の情報幾何学と Damek-Ricci 空間, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 2008 年 6 月 10 日, 筑波大学.
- [2] 熱核, Poisson 核の情報幾何学と Damek-Ricci 空間, 第 55 回幾何学シンポジウム, 2008 年 8 月 14 日, 弘前大学.
- [3] Damek-Ricci 空間の Poisson 核と Fisher 情報計量, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.
- [4] 熱核の情報幾何学と Shannon のエントロピー, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.
- [5] Poisson 核, 熱核の情報幾何学, 北大幾何学コロキウム, 2008 年 12 月 12 日, 北海道大学.
- [6] Poisson 核, 熱核の情報幾何学, 大阪市立大学数学研究所 情報幾何学研究集会 2009, 2009 年 1 月 25 日, 大阪市立大学.
- [7] Poisson 核, 熱核の情報幾何学, リーマン幾何と幾何解析, 2009 年 2 月 20 日, 筑波大学.
- [8] Fisher 情報計量, Poisson 核と調和写像, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 28 日, 東京大学.

(4) 海外渡航 なし

(5) 教育活動

- 微積分 I 演習 (理工学群 化学類, 1 学期)
- 線形代数 I 演習 (理工学群 物理学類, 1 学期)
- 微積分 II 演習 (理工学群 化学類, 2 学期)
- 線形代数 II 演習 (理工学群 物理学類, 2 学期)

(6) その他の活動

- 数学系計算機委員, ホームページ委員 (数学系 web サーバーの管理).