線形代数２ 小テスト (2009.6.24)　　学籍番号　　氏名

問題 1　次の連立方程式を解きなさい．

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{—} \quad (*)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと (*) は $Ax = 0$ と書ける。 A を行基本変形で簡約化すると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって，方程式 (*) は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

まで簡約化できる。 $z = k$ とおくと $x = k$, $y = -2k$。

したがって
解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$

(解空間の次元は 1次元)

$\boxed{\text{問題 2}}$ 次の行列の行列式を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(d\text{-}4)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{(d\text{-}4)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(d\text{-}1)}{=} 1 \times 1 \times 2 = \underline{2}$$

(別解) サラスの方法

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1\times 2\times 1 + 1\times 2\times 2 + (-1)\times 1\times 1 - \left(2\times 2\times 1 + (-1)\times 2\times 1 + 1\times 1\times 1\right)$$

$$= 2+4-1-(4-2+1)$$

$$= 5-3$$

$$= \underline{2}$$