線形代数 2 中間試験 (2009.6.10)　学籍番号 | | | | | | |　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

注意　(1) 解を導きだす過程をできるだけ丁寧に記述すること．説明が不十分 な解答，字の粗暴 な解答は減点 の対象とする．
(2) 最終的に導き出した解を問題文下の 四角の中 に記入せよ．
(3) 途中退席 は認めない．試験終了時間まで十分見直しをすること．

点

1　次の各問に答えよ．

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ から定まる線形変換 $T_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ に対し，その核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ に含まれるベクトルを次の（ア）〜（エ）の中からすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(1)

(2)　$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ 上の標準内積に関して，$\boldsymbol{v}$ と直交するベクトルを次の（ア）〜（エ）の中からすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2)

(3)　次の（ア）〜（エ）の中から直交行列をすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

(3)

裏へ続く

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する線形変換 $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の表現行列 B を求めなさい．

$\boxed{2}$

2 枚目へ続く

3 3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，グラム・シュミットの直交化法を適用し，$\mathbf{R}^3$ の標準内積に関する正規直交基底を作りなさい.

3

裏へ続く

$\boxed{\mathbf{4}}$ 内積空間に関する次の 3 つの命題（ア）（イ）（ウ）の中から 1 つの命題を選び，それを証明しなさい．

（ア） 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leqq \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|$ が成り立つ．

（イ） V の任意の直交系 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,k}$ は線形独立である．

（ウ） 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，V の線形変換 T が $\|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$ を満たすならば，T は直交変換である．

選択した命題：____________________

（証明）

$\boxed{\mathbf{5}}$ これまでの線形代数 2 の講義で学習した中で特に興味を持ったり印象に残ったこと（概念，定理，方法など）を 1 つ挙げ，それを選んだ理由を具体的に書きなさい．

（担当：佐藤）