線形代数 2 中間試験 (2009.6.10)　　　　（略解とコメント）

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．（それぞれ正答 2 つ選択した場合 10 点．ただし正答 1 つのみ，または正答 1 つと誤答 1 つずつ選択した場合は部分点 5 点．）

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ から定まる線形変換 $T_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ に対し，その核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ に含まれるベクトルを次の（ア）～（エ）の中からすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}$ が T_A の核に含まれるとは $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となることである．

(1) イ，ウ

(2) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ 上の標準内積に関して，$\boldsymbol{v}$ と直交するベクトルを次の（ア）～（エ）の中からすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}$ との内積（$\mathbf{R}^3$ の標準内積）をとって，0 になるものを選べばよい．

(2) ウ，エ

(3) 次の（ア）～（エ）の中から直交行列をすべて選びなさい．

（ア）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（イ）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　（ウ）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$　（エ）$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

各行列 A に対し，${}^tAA$ を計算すればよい．単位行列 I_2 となったものが直交行列である．また，列ベクトルの組が正規直交基底になっていれば直交行列である．

(3) ア，エ

（略解とコメント）

$\boxed{\mathbf{2}}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する線形変換 $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の表現行列 B を求めなさい． (20 点)

- $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\,P$ のとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に関する T_A の表現行列 B は $B = P^{-1}AP$ である（系 3.3）．
- 公式 $B = P^{-1}AP$ を記述している者には部分として 10 点与えた．
- 逆行列の計算を間違えている者がいた．

$\boxed{2}$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，グラム・シュミットの直交化法を適用し，$\mathbf{R}^3$ の標準内積に関する正規直交基底を作りなさい． (20 点)

- まず以下を計算する；

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2.$$

  以上で直交系 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ ができた．最後に正規化（ノルムが 1 になるように定数倍）すればよい．
- 上の 3 つ目の式において $\boldsymbol{u}_2$ で計算するところを $\boldsymbol{v}_2$ のまま計算している者がいた．
- 正規化されてない（または正規化するところで計算ミス）場合は部分点として 10 点与えた（つまり直交系をつくれば 10 点）．
- できあがったベクトル達が互いに直交しているか，またノルムが 1 になっているか，簡単な計算で確かめられる．

$\boxed{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 内積空間に関する次の 3 つの命題（ア）（イ）（ウ）の中から 1 つの命題を選び，それを証明しなさい． (20 点)

（ア） 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \leqq \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|$ が成り立つ．定理 4.1

（イ） V の任意の直交系 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,k}$ は線形独立である．定理 5.1

（ウ） 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，V の線形変換 T が $\|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$ を満たすならば，T は直交変換である．定理 6.1