9 対角化の応用

9.1 正方行列の累乗

正方行列 A の k 乗 A^k を一般的に表す方法を考える．

仮に A が対角化可能であるとする．つまり，ある正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

と表すことができるとする．このとき，(9.1) の両辺の k 乗を計算すると，右辺の k 乗が

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & & & \\ & (\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

となることは明らかであろう．左辺の k 乗は

$$\begin{aligned}
\left(P^{-1}AP\right)^k &= \underbrace{\left(P^{-1}AP\right) \cdot \left(P^{-1}AP\right) \cdots \left(P^{-1}AP\right)}_{k\text{ 個}} \\
&= P^{-1}A(PP^{-1})A \cdots A(PP^{-1})AP \\
&= P^{-1}\underbrace{A \cdots A}_{k\text{ 個}}P \\
&= P^{-1}A^kP.
\end{aligned}$$

したがって，

$$A^k = P \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & & & \\ & (\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} P^{-1} \tag{9.2}$$

となる．

例題 9.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の k 乗を求めよ．

解． A の固有多項式は $\Phi_A(t) = t^2 + 1$ であるから，固有値は i と $-i$ である．各固有値 λ に対する固有空間 V_λ は

$$V_i = \left\{ c \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_{-i} = \left\{ c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}$$

であるから，たとえば $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ となる．したがって，(9.2) より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-i)^k + i^k & i\left\{(-i)^k - i^k\right\} \\ -i\left\{(-i)^k - i^k\right\} & (-i)^k + i^k \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

を得る．

上の例題の A については，$A^2 = -I_2$, $A^3 = -A$, $A^4 = I_n$ であるから

$$A^k = \begin{cases} A & (k = 4m+1) \\ -I_2 & (k = 4m+2) \\ -A & (k = 4m+3) \\ I_n & (k = 4m) \end{cases}$$

となることがわかるが，これを k を使って一般的に表そうとすると，複素数が必要になる．成分が実数の行列の k 乗になぜ複素数が現れるのか不思議に思うかもしれないが，これが複素数の有用性なのである．

問題 9.1． 例題 9.1 の行列 A について，次の問いの答えよ．

(1) A の固有値，固有空間を計算せよ．
(2) 例題の解で用いた P 以外の行列 Q を用いて A を対角化せよ．
(3) (2) で定めた Q を用いて A^k を計算しても，(9.3) の式に一致することを確かめよ．

問題 9.2． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の k 乗を求めよ．

9.2 行列の指数関数

n 次正方行列 A に対して，A の指数関数 e^A を次で定義する；

$$e^A := I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m. \tag{9.4}$$

e^A は指数関数 e^x のマクローリン級数

$$e^x = 1 + x + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

に形式的に $x = A$ を代入し，1 を単位行列 I_n におき換えたものに等しい．(9.4) の右辺は無限個の行列の和であるが，どんな行列 A についてもこの無限和はある行列に収束する．一般的な場合の証明は省略するが，仮に A が (9.1) のように対角化可能であるとすると

$$\begin{aligned}
e^A =& P\left(I_n + (P^{-1}AP) + \frac{1}{2!}(P^{-1}AP)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k + \cdots\right)P^{-1}\\
=& P\left\{I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} + \cdots\right\}P^{-1}\\
=& P\begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \cdots + \frac{(\lambda_1)^k}{k!} + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n + \cdots + \frac{(\lambda_n)^k}{k!} + \cdots \end{pmatrix}P^{-1}\\
=& P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

となり，右辺が収束することがわかる．

問題 9.3. 問題 9.2 の行列 A に対して，e^A を計算せよ．

9.3 微分方程式の解法

9.3.1 連立線形微分方程式

n 個の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ と n^2 個の実数 a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ によって定まる次の連立微分方程式

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{df_1(x)}{dx} &= a_{11}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + \cdots + a_{1n}f_n(x)\\
\frac{df_2(x)}{dx} &= a_{21}f_1(x) + a_{22}f_2(x) + \cdots + a_{2n}f_n(x)\\
&\vdots\\
\frac{df_n(x)}{dx} &= a_{n1}f_1(x) + a_{n2}f_2(x) + \cdots + a_{nn}f_n(x)
\end{aligned}\right. \tag{9.5}$$

の解について考える．未知関数たちを $\boldsymbol{F}(x) = {}^t(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ とベクトルで表し，右辺の係数たちを用いて行列 $A = (a_{ij})$ を定義する．このとき，(9.5) は

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = A\boldsymbol{F}(x) \tag{9.6}$$

と行列表示できる．ここで，A が (9.1) のように対角化可能であるとする．このとき，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) =& P^{-1} \cdot \frac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = P^{-1} \cdot A\boldsymbol{F}(x) = (P^{-1}AP)(P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) \\ =& \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} (P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) \end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{G}(x) = {}^t(g_1(x), \dots, g_n(x)) := P^{-1}\boldsymbol{F}(x)$ とおくと，(9.6) は

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{G}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \boldsymbol{G}(x) \tag{9.7}$$

と書ける．つまり，A が対角化可能であるとき，連立方程式 (9.5) は微分方程式 $\dfrac{dg_m(x)}{dx} = \lambda_m g_m(x)$，$(m = 1, \dots, n)$ に簡約化できるのである．この微分方程式の解は $g_k(x) = c_k\, e^{\lambda_k x}$ （ただし，$c_k = g_k(0)$ は初期値）であるから，

$$\boldsymbol{F}(x) = P\boldsymbol{G}(x) = P \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ c_n\, e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

を得る．ここで，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{G}(0) = P^{-1}\boldsymbol{F}(0) \tag{9.9}$$

であるから，(9.5) の解は

$$\boldsymbol{F}(x) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}\boldsymbol{F}(0) \tag{9.10}$$

と書ける．行列の指数関数 (9.4) を使うと (9.10) は

$$\boldsymbol{F}(x) = e^{xA}\boldsymbol{F}(0)$$

と書けることに注意する．

例題 9.2. 次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} f'(x) = -7f(x) - 4g(x) \\ g'(x) = 12f(x) + 7g(x) \end{cases} \quad \text{ただし，} f(0) = 1, g(0) = 2. \tag{9.11}$$

解. $\boldsymbol{F}(x) = {}^t(f(x), g(x))$，$A = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$ とおくと，(9.11) は $\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = A\boldsymbol{F}(x)$ と書ける．A の固有値は 1 と -1 で，それぞれの固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ であるから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．したがって，(9.10) より，

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7e^x + 8e^{-x} \\ 14e^x - 12e^{-x} \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

を得る．

問題 9.4. 関数 $f(x) = c\,e^{\lambda x}$ が微分方程式 $f'(x) = \lambda f(x)$ の解であることを確かめよ．

問題 9.5. (9.12) が例題 9.2 の解になることを確かめよ．

問題 9.6. 次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} f'(x) = -75f(x) + 16g(x) \\ g'(x) = -360f(x) + 77g(x) \end{cases} \quad \text{ただし，} f(0) = -1,\ g(0) = -3.$$

9.3.2 定数係数斉次線形微分方程式

微分方程式

$$f''(x) + pf'(x) + qf(x) = 0 \qquad (p, q \in \mathbf{R}) \tag{9.13}$$

に対し，$\Phi(t) = t^2 + pt + q$ を (9.13) の**固有多項式**（または**特性多項式**）とよぶ．このとき，(9.13) の解 $f(x)$ は，方程式 $\Phi(t) = 0$ が

(i) 異なる 2 つの実数解 a, b をもつならば，$f(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{bx}$,
(ii) 重解 a をもつならば，$f(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$,
(iii) 複素数解 $\alpha \pm i\beta\,(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ をもつならば，$f(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$

で与えられることが知られている．この結果を行列の対角化を用いて説明しよう．まず，(9.13) を連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}f'(x) = -pf'(x) - qf(x) \\ \dfrac{d}{dx}f(x) = f'(x) \end{cases}$$

と解釈する．つまり，$\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = A\boldsymbol{F}(x)$ を満たす $\boldsymbol{F}(x)$ の第 2 成分が求める解である（ちなみに，(9.13) の固有多項式は上で定めた行列 A の固有多項式に等しい)．

A の異なる 2 つの実固有値を持つ場合 (i) は，§9.3.2 で述べたことを適用すればよい．ここでは (ii) 重解の場合と (iii) 複素数解を持つ場合について，例題を用いて説明する (特に重解を持つ場合は行列の三角化のアイデアを用いることに注意する)．

例題 9.3. $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ の解を求めよ．

解． $\boldsymbol{F}(x) = {}^t(f'(x), f(x))$ とおくと $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ は

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{F}(x) \tag{9.14}$$

と書ける．(9.14) 式右辺の行列を A とおく．A の固有多項式は $\Phi_A(t) = (x+1)^2$ であるから固有値は -1，固有空間は $V_{-1} = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbf{R} \right\}$ である．このとき，定理 8.1 より A は対角化不可能であるが，次のようにして三角化することができる．まず，V_{-1} の基底として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選ぶ．次に $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$ が $\mathbf{R}^2$ の基底になるように $\boldsymbol{u}$ を選ぶ．ここでは $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ としよう．そして $P = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

と三角化される．このとき，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) &= P^{-1} \cdot \frac{d}{dx}\boldsymbol{F}(x) = P^{-1}A\boldsymbol{F}(x) \\ &= (P^{-1}AP)(P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(P^{-1}\boldsymbol{F}(x)) \end{aligned} \tag{9.16}$$

であるから，$\boldsymbol{G}(x) = {}^t(g_1(x), g_2(x)) := P^{-1}\boldsymbol{F}(x)$ とおくと，(9.14) は

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{G}(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{G}(x),$$

つまり，連立微分方程式

$$g_1'(x) = -g_1(x) - g_2(x), \tag{9.17}$$

$$g_2'(x) = -g_2(x), \tag{9.18}$$

に簡約化できる．(9.18) より，$g_2(x) = c_1\, e^{-x}$．これを (9.17) に代入すると $g_1'(x) = -g_1(x) - c_1\, e^{-x}$．両辺に e^x をかけると $e^x g_1'(x) + e^x g_1(x) = -c_1$，つまり $(e^x g_1(x))' = -c_1$ であるから，$e^x g_1(x) = -c_1 x + c_2$，すなわち $g_1(x) = -c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x}$ を得る．以上のことから，

$$\boldsymbol{F}(x) = P\boldsymbol{G}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x} \\ c_1\, e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ c_1 x e^{-x} + (c_1 - c_2)e^{-x} \end{pmatrix}.$$

したがって，解は $f(x) = C_1 x e^{-x} + C_2 e^{-x}$ であることがわかる (係数を $c_1 = C_1, c_1 - c_2 = C_2$ と書き直した)．

例題 9.4. $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ の解を求めよ．

解. （未完成）

問題 9.7. (9.15) が成り立つことを確かめよ．

問題 9.8. 微分方程式 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ の解を求めなさい．ただし，$f(0) = 1$，$f'(0) = 0$ を満たすとする．

9.4　2 次形式と 2 次曲面の分類

（未完成）

9.5　問題の略解

問題 9.1 （省略）　**問題 9.2** $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -1+3^k & 1-3^k \\ 1-2^k & -1+2^k+3^k & 1-3^k \\ 1-2^k & -1+2^k & 1 \end{pmatrix}$

問題 9.3 $e^A = \begin{pmatrix} e & e^3 - e & -e^3 + e \\ -e^2 + e & e^3 + e^2 - e & -e^3 + e \\ -e^2 + e & e^2 - e & e \end{pmatrix}$ **問題 9.4, 9.5** （省略）

問題 9.6 $f(x) = -4e^{-3x} + 3e^{5x},\ g(x) = -18e^{-3x} + 15e^{5x}.$

問題 9.7 （省略） **問題 9.8** $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(2e^x + e^{-2x}\right)$