4 月 29 日の講義で基底の変換による線形写像の表現行列の変換式に関する定理を述べました．定理の証明の最後で

$$(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\, PB = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\, AQ \text{ ならば，} PB = AQ$$

を証明しましたが，時間が足りず説明が十分でなかったと思いますので，ここで補足します（以下の補題では $C := PB - AQ$ とおきます）．

補題

$\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ をベクトル空間 W の基底とする．このとき，$m \times n$ 行列 C に対して

$$(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\, C = O \qquad (*)$$

ならば，$C = O$ が成り立つ．

証明. 行列 C の (i, j) 成分を c_{ij} とおく．すると $(*)$ は

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \\ =&(c_{11}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_{m1}\boldsymbol{w}_m, \ldots, c_{1n}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_{mn}\boldsymbol{w}_m) \\ =&(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}). \end{aligned}$$

つまり，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，

$$c_{1i}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_{mi}\boldsymbol{w}_m = \mathbf{0}$$

が成り立つ．$\{\boldsymbol{w}_j\}$ は線形独立だから $c_{1i} = \cdots = c_{mi} = 0$ となる．つまり，任意の i, j に対して $c_{ij} = 0$ であるので $C = O$ となる． □

注意. 補題では「$\{\boldsymbol{w}_j\}$ は W の基底」と仮定したが，単に「$\{\boldsymbol{w}_j\}$ は線形独立」としても上の主張は成り立つ．