線形写像の次元定理

V, W を実数 $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間，$T : V \to W$ を線形写像とする．$n = \dim V$ が有限ならば，

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \tag{1}$$

が成り立つ．

証明. $\mathrm{Im}(T), \mathrm{Ker}(T)$ が有限次元であること：$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ を V の基底とすれば，$\mathrm{Im}(T)$ は $\{T(\boldsymbol{v}_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ で生成されるので，$\dim \mathrm{Im}(T)$ は有限である．一方，$\mathrm{Ker}(T)$ は V の部分空間なので，$\dim \mathrm{Ker}(T) \leq \dim V$ が成り立ち，次元は有限である．

そこで，改めて $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,m}$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の基底とし，$\{\boldsymbol{w}_j\}_{j=1,\ldots,r}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする．像の定義より，$\boldsymbol{w}_j$ に対して $T(\boldsymbol{v}_{m+j}) = \boldsymbol{w}_j$ を満たす V の元 $\boldsymbol{v}_{m+j}$ が存在する．このとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ が V の基底となっていることを示せば，(1) が成り立つことが証明される．

(i) $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ の線形独立性：

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots c_{m+r}\boldsymbol{v}_{m+r} = \mathbf{0}_V \tag{2}$$

とおく．(2) の両辺を T で写像すると

$$c_1T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots c_{m+r}T(\boldsymbol{v}_{m+r}) = \mathbf{0}_W$$

となり，$T(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}_V \ (i = 1, \ldots, m)$ および $T(\boldsymbol{v}_{m+j}) = \boldsymbol{w}_j \ (j = 1, \ldots, r)$ を代入することによって，

$$c_{m+1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots c_{m+r}\boldsymbol{w}_r = \mathbf{0}_W$$

を得る．$\{\boldsymbol{w}_j\}$ の線形独立性から，$c_{m+1} = \cdots = c_{m+r} = 0$ を得る．これらを (2) に代入することにより

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots c_m\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}_V$$

を得る．$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,m}$ の線形独立性から $c_1 = \cdots = c_m = 0$ を得る．以上のことから，(2) を仮定すれば $c_1 = \cdots = c_{m+r} = 0$ が成り立つので，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ は線形独立であることがわかる．

(ii) $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ は V を生成する：$\boldsymbol{x}$ を V の勝手な元とする．$T(\boldsymbol{x})$ は $\mathrm{Im}(T)$ の元なので

$$T(\boldsymbol{x}) = a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{w}_r$$

と表すことができる．いま，$\boldsymbol{y} = a_1\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_{m+r}$ とおくと

$$T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}_W$$

となり，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(T)$ であることがわかる．したがって，

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m$$

と表すことができる．ゆえに

$$\boldsymbol{x} = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m + a_1\boldsymbol{v}_{m+1} + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_{m+r}$$

となり，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ の線形結合で書けることが示された．

以上のことから，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m+r}\}$ は V の基底となり，

$$\dim V = m + r = \dim\ \mathrm{Ker}(T) + \dim\ \mathrm{Im}(T)$$

が成り立つ． $\square$