線形代数 2 期末試験 略解 (2009.7.29, 担当：佐藤)

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有ベクトルとはどういうベクトルか説明しなさい（定義を述べなさい）． (5 点)

- 行列 A に対し，t に関する方程式 $\det(tI_n - A) = 0$ の解を固有値といい，固有値 λ に対し，方程式 $(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解を λ に属する固有ベクトルという．
- ある数 λ に対して $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ を A の固有ベクトルという．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルを次の（ア）〜（エ）の中からすべて選びなさい． (10 点)

（ア）$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ （イ）$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ （ウ）$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （エ）$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

各ベクトルに A をかけて元のベクトルに定数倍になっているか調べればよい．（ウ）は固有値 2 に属する固有ベクトル，（エ）は固有値 3 に属する固有ベクトルである．（ア）と（イ）は固有ベクトルではない．

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ に対して次の各問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい． (5 点)

1 と 4.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めなさい． (10 点)

固有値 1 の固有ベクトルが $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，固有値 4 の固有ベクトルが $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから，たとえば，$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) (2) の結果を用いて以下の連立微分方程式の解を求めなさい．ただし，初期値は $f(0) = 1$, $g(0) = -1$ とする． (10 点)

$$\begin{cases} f'(x) = 7f(x) - 6g(x) \\ g'(x) = 3f(x) - 2g(x) \end{cases}$$

$\boldsymbol{F}(x) = {}^t(f(x), g(x))$ とおくと上の連立微分方程式は $\boldsymbol{F}'(x) = A\boldsymbol{F}(x)$ と書ける．(2) の結果から $(P^{-1}\boldsymbol{F}(x))' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}(P^{-1}\boldsymbol{F}(x))$ であるから，$P^{-1}\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} c_1e^x \\ c_2e^{4x} \end{pmatrix}$．つまり $\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} c_1e^x \\ c_2e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^x + 2c_2e^{4x} \\ c_1e^x + c_2e^{4x} \end{pmatrix}$．初期値の条件から，$1 = f(0) = c_1 + 2c_2$，$-1 = g(0) = c_1 + c_2$．これを満たすのは $c_1 = -3$，$c_2 = 2$ のときである．したがって，解は $\boldsymbol{f(x) = -3e^x + 4e^{4x}}$, $\boldsymbol{g(x) = -3e^x + 2e^{4x}}$.

線形代数 2 期末試験 略解 (2009.7.29, 担当：佐藤)

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい． (5 点)

固有値は -3 と 3.

(2) 各固有値に関する固有空間を求めなさい． (5 点)

固有値 λ に関する固有空間を V_λ と書くことにすると，

$$V_{-3} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbf{R} \right\}, \quad V_3 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

(3) 各固有空間の正規直交基底を求めなさい． (10 点)

例えば V_{-3} については $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$, V_3 については $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

(4) ${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めなさい． (10 点)

例えば $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすると ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & k & 5 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値のひとつが 3 となるような k の条件を求めなさい． (20 点)

A の固有値とは $\Phi_A(t) := \det(tI_n - A) = 0$ の解であるから，A が固有値 3 を持つならば，$\Phi_A(3) = 0$ となる．ここで

$$\det(3I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3-k & -5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5-k & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6-k & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 6(6-k).$$

であるから，$\Phi_A(3) = 0$ となるのは $\boldsymbol{k = 6}$ のときである．

$\boxed{5}$ (10 点)