変数変換とヤコビアン

- （1 変数関数）$x = \phi(t)$ と変数変換；

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.$$

ただし，$a = \phi(\alpha)$，$b = \phi(\beta)$.

- （2 変数関数）$(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ と変数変換；

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_E f(\varphi(u, v), \phi(u, v)) \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u, v) & \varphi_v(u, v) \\ \psi_u(u, v) & \psi_v(u, v) \end{pmatrix} \right| dudv$$

ただし，写像 $E \to D; (u, v) \mapsto (x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ は 一対一 に対応していなければならない.

□ アフィン変換; φ, ψ が 1 次多項式の場合.

問題 **8.5.** 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{e^{x-y}}{1 + (x + y)^2} dxdy$,　ただし $D = \{(x, y) \,|\, -1 \leq x+y \leq 1,\ -1 \leq x-y \leq 1\}$.

(2) $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{x}{2} + y\right) \log(2x + y + 1)\,dxdy$,
ただし $D = \{(x, y) \,|\, 0 \leq x + 2y \leq \pi,\ 1 \leq 2x + y + 1 \leq \pi\}$.

(3) $\displaystyle\iint_D (x - y)^2\, e^{(x+y)^2} dxdy$,　ただし D は原点，$(1, 0)$，$(0, 1)$ を頂点とする三角形.

□ 極座標変換**;** $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

問題 **8.6.** 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$,　$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (px^2 + qy^2)\,dxdy$　$(p, q \in \mathbf{R})$,　$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$,　$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$,　$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq x\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$,　$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 2ax\}$