8 重積分

重積分の意味

2 変数関数 $f(x,y)$ の領域 D 上での積分；

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = (D \text{ の範囲で } z = f(x,y) \text{ と } xy\text{-平面とで囲まれる部分の体積})$$

累次積分

重積分を 1 変数関数の積分の繰り返し帰着させる計算方法.

□ 積分領域 D が長方形領域 $[a,b]\times[c,d]$ の場合

問題 **8.1.** 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{1+x}\,dy\right) dx$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy, \quad D = [1,3]\times[0,2]$

(3) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy, \quad D = [0,1]\times[0,1]$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x e^{x-y}\,dy\right) dx$

□ 一般の領域での重積分

重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の計算

(1) 積分領域を $\{(x,y)\,|\,a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ の形に表す.

(2) $I = \displaystyle\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$ の形に表し，括弧の中身から積分の計算をする.

問題 **8.2.** 次の領域 D を図示し，積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

(1) D は原点, (π,π), $(0,\pi)$ を頂点とする三角形の内部，$f(x,y) = \sin(x-y)$.

(2) D は $y = x$, $y = x^2$ によって囲まれる領域，$f(x,y) = 2x+5y$.

(3) D は $y = x-2$, $x+y^2 = 4$ によって囲まれる領域，$f(x,y) = xy$.