

7 陰関数

陽関数と陰関数

- $y = f(x)$ によって x と y が関数関係をもつとき, y は x の陽関数 (explicit) であるという.
- ある 2 変数関数 $F(x, y)$ に対し, $F(x, y) = 0$ によって x と y が関係付けられているとする. このとき (ある条件を満たすならば) 局所的に $y = f(x)$ と書くことができる. この関数 $f(x)$ を $F(x, y) = 0$ から定まる陰関数 (implicit) という (陰関数の存在定理を参照せよ).

例題 7.1. $x^2 + y^2 = 1$ から定まる陰関数 $y = y(x)$ の微分 $y' = y'(x)$ を求めよ.

解. $y = y(x)$ と表されているとすると $x^2 + (y(x))^2 = 1$. 両辺を x で微分すると

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

したがって,

$$y'(x) = -\frac{x}{y}.$$

問題 7.1. 次の関数から定まる陰関数の微分 y' を求めよ.

- (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (2) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$
- (3) $x^y = y^x$

問題 7.2. 次の関数から定まる陰関数 y について, y' および y'' を求めよ.

- (1) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$
- (2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

問題 7.3. 次の関数から定まる陰関数 y の極値を求めよ.

- (1) $x^3y^3 + y - x = 0$
- (2) $x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0$