6 多変数関数の極値

2 変数関数の極値

$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるとすると，

- $y = b$ で固定した関数 $g(x) := f(x,b)$ も $x = a$ で極値をとる．つまり，$g'(a) = f_x(a,b) = 0$ を満たす．
- 同様に $f_y(a,b) = 0$ を満たす．

このとき，$f(x,y)$ の点 (a,b) の近傍での 2 次近似は

$$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + \frac{1}{2}(x-a, y-b)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

で与えられる．$(x,y)\,(\neq (a,b))$ に対して，上式右辺の第 2 項が常に正のとき，(a,b) は（孤立した）極小値を与える．また，上式右辺の第 2 項が常に負のとき，(a,b) は（孤立した）極大値を与える．

極値の求め方（判定法）

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす (a,b) を求める．

(2) 上で求めた (a,b) に対して $H_f(a,b) := \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$ を計算する．

- $\det(H_f(a,b)) > 0$ かつ，
  - $f_x(a,b) > 0$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとる．
  - $f_x(a,b) < 0$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとる．
- $\det(H)_f(a,b) < 0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない．
- $\det(H)_f(a,b) = 0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとるかどうか判定できない．

問題 **6.1.** 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = (x+y)\,e^{-x^2-y^2}$ (2) $f(x,y) = \dfrac{2}{3}y^3 + y^2 - x^2y + x^2$

(3) $f(x,y) = xy(1-2x-3y)$ (4) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(5) $f(x,y) = 2\log x + 3\log y + \log(6-x-y)$