5　2 次近似，テイラー展開

k 次近似，テイラー級数

2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，次の性質を満たす関数 $g(x,y)$ を点 (a,b) における $f(x,y)$ の k 次近似とよぶ；

- $g(x,y)$ は x,y に関する k 次の多項式である．
- $f(x,y)$ と $g(x,y)$ の点 (a,b) における各偏微分係数（0 階から k 階まで）が等しい；

$$
\begin{gathered}
f(a,b) = g(a,b),\\
f_x(a,b) = g_x(a,b),\quad f_x(a,b) = g_y(a,b),\\
f_{xx}(a,b) = g_{xx}(a,b),\quad f_{xy}(a,b) = g_{xy}(a,b),\quad f_{yy}(a,b) = g_{yy}(a,b),\\
\vdots\\
(k \text{ 階偏微分係数まで})
\end{gathered}
$$

問題 5.1. 次の関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における 2 次近似を求めよ．

(1) $f(x,y) = e^{2x+3y}$,　$(a,b) = (0,0)$

(2) $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$,　$(a,b) = (1,1)$

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1 - x^2 y}$,　$(a,b) = (0,0)$

問題 5.2. 1 変数関数の極値とは何か答えよ．また，極値の求め方（手順）を答えよ．

問題 5.3. 次の行列 A に対して，$h(X,Y) := (X,Y)\,A\ {}^t(X,Y)$ を計算し，X,Y が独立にいろいろな値をとるとき，$h(X,Y)$ の符号は (i) 常に正か，(ii) 常に負か，それとも (iii) 正にも負にもなり得るか答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$