4 合成関数の偏微分

合成関数の微分（2 変数から 1 変数）

2 変数関数 $f(x,y)$ と 1 変数関数 $x(t), y(t)$ に対して，

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)$$

問題 **4.1.** $f(x,y)=x^y$，$x(t)=t^2$，$y(t)=t^3$ に対して次の問いに答えよ．

(1) $f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

(2) (1) の計算結果から，直接 $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

(3) 合成関数の微分の公式を用いて $\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))$ を計算せよ．

合成関数の微分（2 変数から 2 変数）

$f(x,y)$ と $x(u,v), y(u,v)$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}f(x(u,v),&y(u,v))\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)),\\ \frac{\partial}{\partial v}f(x(u,v),&y(u,v))\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)).\end{aligned}$$

問題 **4.2.** $f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$x(r,\theta)=r\cos\theta, y(r,\theta)=r\sin\theta$ と $f(x,y)$ との合成関数を $f^*(r,\theta)$ とおく．つまり $f^*(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$．このとき，以下の式が成り立つことを示せ．

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f^*}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f^*}{\partial \theta^2}.$$