3　1 次近似と接平面の方程式

関数の 1 次近似

$f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$g(x,y)$ が $f(x,y)$ の点 $(x,y)=(a,b)$ の近傍における **1** 次近似とは以下の 2 条件を満たすときをいう；

(i) $g(x,y)$ は x,y に関する高々 1 次の多項式である．

(ii) $g(x,y)$ と $f(x,y)$ の (a,b) における 0 階，1 階の偏微分係数が等しい．つまり $f(a,b)=g(a,b)$，$f_x(a,b)=g_x(a,b)$，$f_y(a,b)=g_y(a,b)$ が成り立つ．

注意：厳密には正しい定義ではないが，ここではこのように考えることにする．

問題 **3.1.** 上の条件 (i) から $f(x,y)$ の 1 次近似は

$$A(x-a)+B(y-b)+C$$

と書ける．条件 (ii) を用いて定数 A,B,C を決定せよ．

曲面の接平面と法線

関数 $f(x,y)$ に対し，1 次近似 $z=f(a,b)+f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)$ で与えられる曲面を点 $(a,b,f(a,b))$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面とよぶ．また，

$$(x,y,z)=(a,b,f(a,b))+t(f_x(a,b),f_y(a,b),-1)\quad(t\in\mathbf{R})$$

または t を消去して

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)}=\frac{y-b}{f_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}$$

で表される曲線を点 $(a,b,f(a,b))$ を通る $z=f(x,y)$（または接平面）の法線とよぶ．

問題 **3.2.** 1 変数関数 $f(x)$ の $x=a$ の近傍の 1 次近似が $x=a$ における接線の方程式であることを確かめよ．

問題 **3.3.** 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\boldsymbol{p}$ における接平面および $\boldsymbol{p}$ を通る法線の方程式を求めよ．

(1) $f(x,y)=3x^2y+xy$，$\boldsymbol{p}=(1,-1,-4)$

(2) $f(x,y)=xy$，$\boldsymbol{p}=(1,-1,-1)$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\boldsymbol{p}=(a,b,\sqrt{1-a^2-b^2})$