

2 偏微分係数, 偏導関数

問題 2.1. 関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ を, x, y に関して偏微分せよ.

問題 2.2. 次の関数に対して, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} を計算せよ.

(1) $f(x, y) = \sin(x \cos y)$

(2) $f(x, y) = \log(x + e^y)$

(3) $f(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^3$

問題 2.3. xy -平面の $x > 0$ の領域で定義された関数 $f(x, y) = x^y$ に対して, f_x, f_y, f_{xy} を計算せよ.

問題 2.4. 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

に対して, $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ を計算せよ.

問題 2.5. 関数

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad (t > 0, x \in \mathbf{R})$$

が $u_t = u_{xx}$ を満たすことを示せ. ただし, $\exp(x) = e^x$.

問題 2.6. 次の関数 $f(x, y)$ が $f_{xx} + f_{yy} = 0$ を満たすことを示せ.

(1) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

(2) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$

問題 2.7. 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

に対して, $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ を計算せよ.