

1 2変数関数のグラフ, 極限

問題 1.1. 関数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ のグラフ $z = f(x, y)$ がどのような形をしているか考えよ.

ヒント: 平面の極座標表示 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

問題 1.2. 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ について以下の問に答えよ.

- (1) $f(x, y)$ の定義域を求めよ (どのような領域で定義可能か).
- (2) 問題 1.1 を参考にして, グラフ $z = f(x, y)$ がどのような形をしているか考えよ.

問題 1.3. 関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ の等高線を書いて, グラフ $z = f(x, y)$ がどのような形をしているか考えよ.

問題 1.4. 次の関数 $f(x, y)$ の極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ が存在しないことを示せ. つまり, 原点 $(0, 0)$ への近づけ方によって, $f(x, y)$ が異なる値に近づくことを示せ.

(1) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$

(2) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(3) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

問題 1.5. 次の関数 $f(x, y)$ に対して, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ であることを示せ. つまり, $\sqrt{x^2 + y^2}$ の値が十分小さいとき, $|f(x, y)|$ の値も十分小さくできることを示せ.

(1) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(2) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}$