微分積分 2 演習 中間テスト (2009.6.10) 学籍番号 | | | | | | | 氏名

注意 (1) 解を導きだす過程をできるだけ丁寧に記述すること．説明が不十分 な解答，字の粗暴 な解答は減点 の対象とする．

(2) 最終的に導き出した解を問題文下の 四角の中 に記入せよ．

(3) 途中退席 は認めない．試験終了時間まで十分見直しをすること．

点

1 次の関数 $f(x,y)$ について，偏微分係数の定義にしたがって $f_x(0,0)$ および $f_y(0,0)$ を計算しなさい．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot h}{\sqrt{0+h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$f_x(0,0)=$ $\boxed{0}$ $f_y(0,0)=$ $\boxed{0}$

裏へ続く

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ について，$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を計算しなさい．

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \times (2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$f(x,y)$ の対称性より、$f_{yy} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ となることがわかる。したがって

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 0$$

$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \boxed{0}$

2 枚目へ続く

微分積分 2 演習 中間テスト [2 枚目] (2009.6.10) 学籍番号 | | | | | | 氏名

4 関数 $f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3$ について以下の問に答えなさい．

(1) $f_x(a,b) = 0$ かつ $f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) をすべて求めなさい．

$f_x = 3x^2 - 6y$, $f_y = 3y^2 - 6x$

求める a, b は

$$\begin{cases} 3a^2 - 6b = 0 \\ 3b^2 - 6a = 0 \end{cases}$$ の解である

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 0 & \text{—①} \\ b^2 - 2a = 0 & \text{—③} \end{cases}$$

①より $b = \frac{a^2}{2}$ を③に代入

$\frac{a^4}{4} - 2a = 0$

$\frac{1}{4}a(a^3 - 8) = 0$

$\frac{1}{4}a(a-2)(a^2+2a+4) = 0$

$\therefore a = 0,\ 2$

$ b = 0,\ 2$

(1) $(0,0)$, $(2,2)$

(2) $f(x,y)$ の極値を求めなさい．

$f_{xx} = 6x$

$f_{yy} = 6y$

$f_{xy} = -6$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$ とおく

i) $(a,b) = (0,0)$ において

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$\det H_f(0,0) = -36 < 0$

したがってこの点で極値はとらない

ii) $(2,2)$ において

$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$

$\det H_f(2,2) = 144 - 36$

$= 108 > 0$

$f_{xx}(2,2) = 12 > 0$

したがって点 $(2,2)$ で $f(x,y)$ は極小値をとる

その値は $f(2,2) = 8 - 24 + 8$

$= -8$

(2) $(2,2)$ で極小値 -8

(担当：佐藤)

$\boxed{4}$ 次の関数の極限値が存在しないこと（つまり，$(x,y) \to (0,0)$ の近づき方によって極限の値が異なること）を示しなさい．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

直線 $y = mx$ に沿って $(0,0)$ に近づける

つまり $(t, mt) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

このとき $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t-mt}{t+mt} = \lim_{t\to 0} \frac{(1-m)t}{(1+m)t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-m}{1+m} = \frac{1-m}{1+m}$

したがって，この値は m によって決まる。つまり極限値は存在しない。

(別解) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$

よって，極限は存在しない。

$\boxed{5}$ これまでの微分積分２演習および微分積分２の講義で学習したことの中で特に興味を持ったり印象に残ったこと（概念，定理，方法など）を１つ挙げ，それを選んだ理由を具体的に説明せよ．

（担当：佐藤）