問題 0.5 (2)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx$$

解. $\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

である，したがって，三角関数の有理関数の積分 $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ は t に関する有理関数の積分

$$2\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

に置き換えられる．

x が 0 から $\pi/2$ まで動くとき，t は 0 から 1 まで動くから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx =& 2\int_0^1 \frac{dt}{2t+1-t^2} \\
=& -2\int_0^1 \frac{dt}{(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\right) dt \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|\right]_0^1 \\
=& -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).
\end{aligned}$$

対数の中の有理化の仕方によって，上の値は

$$\sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\log(3+2\sqrt{2}), \quad -\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1), \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\log(3-2\sqrt{2})$$

と書ける（どれも値が等しいことを確かめよ）．