微積 2 演習 期末試験 略解 (2009.7.29, 担当：佐藤)

$\boxed{1}$ $x^2+2xy+2y^2=1$ で定まる陰関数 y について，以下の問に答えなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を求めなさい． (5 点)

$x^2+2xy+2y^2=1$ の両辺を x で微分すると $2x+2y+2xy'+4yy'=0$．したがって
$\boldsymbol{y' = -\dfrac{x+y}{x+2y}}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{(x+2y)^3}$ となることを示しなさい． (5 点)

$$\begin{aligned}
y'' =& \frac{d}{dx}\left(-\frac{x+y}{x+2y}\right) = -\frac{(1+y')(x+2y)-(x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2} \\
=& -\frac{y-xy'}{(x+2y)^2} = -\frac{y(x+2y)+x(x+y)}{(x+2y)^3} \\
=& -\frac{x^2+2xy+2y^2}{(x+2y)^3} = \boldsymbol{-\frac{1}{(x+2y)^3}}.
\end{aligned}$$

(3) y の極値をすべて求めなさい． (10 点)

$y'=0$ となるのは $y=-x$ のときである．これを $x^2+2xy+2y^2=1$ に代入すると $x^2=1$．したがって，$x=\pm 1$ のとき，極値をとる可能性がある（そのときの y の値はそれぞれ ∓ 1）．y'' に $(x,y)=(1,-1)$ を代入すると $y''=1>0$．したがって，$\boldsymbol{x=1}$ **のとき，極小値** $\boldsymbol{y=-1}$ **をとる**．また，y'' に $(x,y)=(-1,1)$ を代入すると $y''=-1<0$．したがって，$\boldsymbol{x=-1}$ **のとき，極大値** $\boldsymbol{y=1}$ **をとる**．

$\boxed{2}$ 積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx$ について次の各問に答えよ．

(1) 積分領域を図示しなさい． (5 点)

積分領域を D とおくと，$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2-x\}$．したがって，$D$ は放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2-x$ および y 軸とで囲まれる領域である（放物線と直線は $x=1$ の点で交わる）．グラフは省略する．

(2) 積分順序を交換しなさい． (5 点)

$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ 0\le x\le \sqrt{y}\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,1\le y\le 2,\ 0\le x\le 2-y\}$，とおくと D は D_1 と D_2 に分割される．したがって，

$$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_1^2\left(\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

(3) $f(x,y)=x^2y$ に対して，積分の値を求めなさい（積分順序はどちらでもよい）． (10 点)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\int_{x^2}^{2-x} x^2y\,dy\right)dx =& \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left[y^2\right]_{x^2}^{2-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^1(-x^6+x^4-4x^3+4x^2)\,dx \\
=& \frac{1}{2}\left[-\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{41}{210}}.
\end{aligned}$$

微積 2 演習 期末試験 略解 (2009.7.29, 担当：佐藤)

$\boxed{3}$ 次の積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$, ただし D は原点，$(0,\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},0)$ を頂点とする三角形の内部． (10 点)

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}-x\}$．したがって，

$$\iint_D \sin(x+y)\,dxdy=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2-x}\sin(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^{\pi/2}[-\cos(x+y)]_0^{\pi/2-x}\,dx$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right)dx=[\sin x]_0^{\pi/2}=\mathbf{1}.$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x\}$ (20 点)

D は中心が $(1,0)$ で半径 1 の円の内部である．$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と極座標変換すると D は $E=\{(r,\theta)\,|\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2\cos\theta\}$ に写され，ヤコビアンは r であるから $dxdy=r\,drd\theta$ となる．したがって，積分は

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} r^2\cdot r\,dr\right)d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2\theta))^2d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[\frac{3}{2}\theta+\sin(2\theta)+\frac{1}{8}\sin(4\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}.$$

$\boxed{4}$ $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ とする．広義積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy$ を求めなさい． (20 点)

$x^2+y^2=1$ を満たす点で被積分関数は発散するので，まず，中心が原点で半径が m の円の内部の領域を D_m とし，D_m 上での積分値を求める．極座標変換により

$$\iint_{D_m}\sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^m\sqrt{\frac{1+r^2}{1-r^2}}\cdot r\,dr=2\pi\int_0^m\sqrt{\frac{1+r^2}{1-r^2}}\cdot r\,dr$$

$r^2=t$ と変数変換すると，$0\le r\le m$ のとき $0\le t\le m^2$，$r\,dr=\frac{dt}{2}$．したがって，

$$\int_0^m\sqrt{\frac{1+r^2}{1-r^2}}\cdot r\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{m^2}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{m^2}\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{m^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$t=\sin u$ と変換すると $0\le t\le m^2$ のとき $0\le u\le\sin^{-1}(m^2)$ であるから第 1 項の積分は

$$\int_0^{m^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{\sin^{-1}(m^2)}\frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-\sin^2 u}}du=\int_0^{\sin^{-1}(m^2)}du=\sin^{-1}(m^2).$$

第 2 項については $\displaystyle\int_0^{m^2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{m^2}=-\sqrt{1-m^2}+1.$

以上のことから求める積分値は $\displaystyle\lim_{m\to 1}2\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(m^2)-\sqrt{1-m^2}+1\right)=\boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}.$

$\boxed{5}$ (10 点)