確率統計 期末試験 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y \sim N(m, s^2)$

(1) $E(W_1) = E(X_1) - E(X_2) = \mu - \mu = 0,\ V(W_1) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$
したがって，W_1 は <u>正規分布 $N(0, 2\sigma^2)$</u> に従う．

(2) $E(W_2) = E(X) - E(Y) = \mu - m,\ V(W_2) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = \sigma^2 + s^2.$
したがって，W_1 は <u>正規分布 $N(\mu - m, \sigma^2 + s^2)$</u> に従う．

(3) $E(\overline{Y}) = \dfrac{1}{200}\displaystyle\sum_{i=1}^{200} E(Y_i) = \dfrac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} E(Y) = E(Y) = m,$

$$V(\overline{Y}) = \frac{1}{200^2}\sum_{i=1}^{200} V(Y_i) = \frac{1}{200^2}\sum_{i=1}^{200} V(Y) = \frac{1}{200}V(Y) = \frac{s^2}{200}.$$

したがって，$\overline{Y}$ は <u>正規分布 $N\left(m, \dfrac{s^2}{200}\right)$</u> に従う．

(4) $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)$，$\left(\dfrac{Y-m}{s}\right)$ はそれぞれ標準正規分布に従い，かつ独立なので，T は <u>自由度 2 の χ^2 分布</u> に従う．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 中学校男子 3 年生の身長 X は $N(163.0, 8^2)$ に従い，女子 3 年生の身長 Y は $N(155.5, 6^2)$ に従う．

(1) 求める確率は，X と同じ分布に従う独立な確率変数 X_1, X_2 に対し，$P(|X_1 - X_2| < 4)$ である．確率変数 $X_1 - X_2$ は $\boxed{\mathbf{1}}$(1) の結果から，正規分布 $N(0, 2 \times 8^2)$ に従う．ここで，

$$\begin{aligned}
P(|X_1 - X_2| < 4) =& P\left(\left|\frac{(X_1 - X_2) - 0}{8\sqrt{2}}\right| < \frac{4}{8\sqrt{2}}\right) \\
=& P\left(|Z| < \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\
=& 2P\left(0 < Z < \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

である．ただし，Z は標準正規分布に従う確率変数である．$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx \dfrac{1}{2.82} \approx 0.35$ であるから，正規分布表より，$I(0.35) = 0.1368$．よって，求める確率は $2 \times 0.1368 \times 100 \approx$ <u>27.4%</u> である．

(2) 求める確率は，$P(X \geq Y + 10) = P(X - Y \geq 10)$ である．確率変数 $X - Y$ は $\boxed{\mathbf{1}}$(2) の結果から，正規分布 $N(7.5, 8^2 + 6^2)$ に従う．ここで，

$$\begin{aligned}
P(X - Y > 10) =& P\left(\frac{(X-Y) - 7.5}{\sqrt{8^2 + 6^2}} < \frac{10 - 7.5}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right) \\
=& P\left(Z > \frac{2.5}{10}\right) = P\left(Z > 0.25\right) \\
=& 0.5 - I(0.25) = 0.5 - 0.0987 = 0.4013
\end{aligned}$$

である．ただし，Z は標準正規分布に従う確率変数である．よって，求める確率は <u>40.1%</u> である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 標本サイズ $n=200$ の標本平均が $\bar{x}_{200}=51$．母集団は $N(\mu,20^2)$ に従う．

(1) 求めるものは $P(\bar{x}_{200}-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_{200}+\varepsilon)=0.95$ を満たす区間 $\bar{x}-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}+\varepsilon$ である．ここで，$\boxed{\mathbf{1}}$(3) の結果から，$\bar{x}_{200}$ は $N\left(\mu,\dfrac{20^2}{200}\right)$ に従う確率変数の実測値であるので

$$\begin{aligned}\bar{x}_{200}-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_{200}+\varepsilon &\iff -\varepsilon\leq\bar{x}_{200}-\mu\leq\varepsilon\\ &\iff -\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{200}}}\leq\frac{\bar{x}_{200}-\mu}{\frac{20}{\sqrt{200}}}\leq\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{200}}}\\ &\iff -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\leq Z\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となり（Z は標準正規分布に従う確率変数），

$$\begin{aligned}P(\bar{x}_{200}-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_{200}+\varepsilon)=0.95 &\iff P\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\leq Z\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)=0.95\\ &\iff P\left(0\leq Z\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)=0.475\end{aligned}$$

である．$I(z)=0.475$ となるのは，$z=1.96$ であるから，$\varepsilon=1.96\times\sqrt{2}\approx1.96\times1.41\approx2.8$．したがって，母平均 μ の 95% 信頼区間は $\underline{48.2\leq\mu\leq53.8}$.

(2) N 人分の標本調査の結果, 信頼度 95% の μ の信頼区間の幅が 4 以下であるとする．つまり, $P(\bar{x}_N-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_N+\varepsilon)=0.95$ のとき，$2\varepsilon\leq4$（すなわち $\varepsilon\leq2$）となる．(1) と同様に,

$$\begin{aligned}\bar{x}_N-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_N+\varepsilon &\iff -\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\leq\frac{\bar{x}_N-\mu}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\leq\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\\ &\iff -\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\leq Z\leq\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\end{aligned}$$

であるから,

$$P(\bar{x}_N-\varepsilon\leq\mu\leq\bar{x}_N+\varepsilon)=0.95\iff P\left(0\leq Z\leq\frac{\varepsilon}{\frac{20}{\sqrt{N}}}\right)=0.475$$

である．ただし，Z は標準正規分布に従う確率変数である．$\varepsilon=1.96\times\dfrac{20}{\sqrt{N}}\leq2$ より,

$$N\geq\left(1.96\times20\times\frac{1}{2}\right)^2=384.16.$$

したがって，$\underline{385\ \text{人以上}}$ 調査する必要がある．