確率統計 第 4 回小テスト 解答

$\boxed{1}$ X と Y は独立な確率変数で，それぞれ $N(2,1)$，$N(3,2)$ に従う．

(1) $E(2X-Y) = 2E(X) - E(Y) = 2\times 2 - 3 = \underline{1}$.

(2) $V(2X-Y) = V(2X+(-1)Y) = 2^2V(X) + (-1)^2V(Y) = 4\times 1 + 2 = \underline{6}$.

(3) 「独立な確率変数 X と Y が正規分布に従うなら，$aX+bY$ も正規分布に従う」ことから，$X-Y$ は正規分布に従う．期待値は $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 2-3 = -1$，分散は $V(X-Y) = V(X) + (-1)^2V(Y) = 1+2 = 3$．したがって，$\underline{X-Y \text{ は } N(-1,3) \text{ に従う}}$.

(4) (3) の結果から $Z = \dfrac{(X-Y)-(-1)}{\sqrt{3}}$ は標準正規分布に従う．したがって，

$$
\begin{aligned}
P(X>Y) =& P(X-Y>0) = P\left(\frac{(X-Y)-(-1)}{\sqrt{3}} > \frac{0-(-1)}{\sqrt{3}}\right) \\
=& P\left(Z > \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P(Z > 0.58) \\
=& 0.5 - I(0.58) = 0.5 - 0.219 = \underline{0.281}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ 「確率統計」の試験の得点 X は $N(55, 10^2)$ に従う．したがって，$Z = \dfrac{X-55}{10}$ は標準正規分布に従う．

(1)

$$
\begin{aligned}
P(60 < X < 70) =& P\left(\frac{60-55}{10} < \frac{X-55}{10} < \frac{70-55}{10}\right) \\
=& P(0.5 < Z < 1.5) \\
=& I(1.5) - I(0.5) \\
=& 0.4332 - 0.1915 = 0.2417.
\end{aligned}
$$

受験者は 300 人だから，$300 \times 0.2417 = 72.51$ より，$\underline{\text{およそ } 73 \text{ 人}}$.

(2) 求めるものは $P(X>k) = 0.2$ となる k の値である（$k>55$ と考えてよい）．

$$
\begin{aligned}
0.2 =& P(X>k) = P\left(\frac{X-55}{10} > \frac{k-55}{10}\right) = P\left(Z > \frac{k-55}{10}\right) \\
=& 0.5 - P\left(0 < Z < \frac{k-55}{10}\right) = 0.5 - I\left(\frac{k-55}{10}\right).
\end{aligned}
$$

よって，$I\left(\dfrac{k-55}{10}\right) = 0.5 - 0.2 = 0.3$ である．正規分布表において確率の値が 0.3 に一番近いのは $I(0.84)$ であるから，$0.84 = \dfrac{k-55}{10}$ となり，これを解くことにより $k = 55 + 8.4 = 63.4$ を得る．したがって，$\underline{64 \text{ 点以上ならば「A」がつく}}$ ことがわかる．

（2013.12.6 担当：佐藤）

確率統計 第 4 回小テスト 解答

$\boxed{3}$

(1) $1000k - 250(20-k) = \underline{1250k - 5000}$.

(2) 二項分布 $\mathrm{Bin}(n,p)$ の期待値は np，分散は $np(1-p)$ である（教科書 p.54 を参照）．したがって，勝った回数 X の期待値は $20 \times \frac{1}{3} = \underline{\frac{20}{3}} = 6.67$，標準偏差は $\sqrt{20 \times \frac{1}{3} \times \times \frac{2}{3}} = \underline{\frac{2\sqrt{10}}{3}} = 2.11$.

(3) (1) の結果から, 求めるものは $1250k - 5000 > 3000$ を満たす k である．これを解くと, $k > \frac{8000}{1250} = 6.4$ を得る．したがって，少なくとも 3000 円得をするためには $\underline{7\text{ 勝}}$ する必要がある．

(4) 求める確率は $P(7 \le X \le 20)$ であるが，正規分布で近似する場合は $P(6.5 \le X \le 20.5)$ を求める．仮定から，X は $N\left(\frac{20}{3}, \frac{40}{9}\right)$ に従うと考えてよいので，$Z = \frac{X - \frac{20}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}}$ は標準正規分布に従う．よって，

$$\begin{aligned}P(6.5 \le X \le 20.5) =& P\left(\frac{6.5 - \frac{20}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}} \le Z \le \frac{20.5 - \frac{20}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}}\right) = P\left(-\frac{0.5}{2\sqrt{10}} \le Z \le \frac{41.5}{2\sqrt{10}}\right)\\ =& P(-0.08 \le Z \le 6.56)\\ =& I(0.08) + I(6.56) = 0.0319 + 0.5 = \underline{0.532}.\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 大型のりんご 1 個の重さ X は $N(330, 15^2)$ に従い，並型のりんご 1 個の重さ Y は $N(280, 10^2)$ に従う．

(1) X_1, X_2, X_3 は独立で X と同一の分布に従う．「無作為に選んだ大型のりんご 3 個の合計の重さ W の分布」は $X_1+X_2+X_3$ の分布である．これも正規分布で，$E(W) = E(X_1+X_2+X_3) = 3E(X) = 990$, $V(W) = V(X_1+X_2+X_3) = 3V(X) = 3 \times 15^2$ より，求める分布は $\underline{N(990, 675)}$ である．

(2) 求めるものは $P(W > 1000)$．$Z = \frac{W - 990}{\sqrt{675}} = \frac{W-990}{15\sqrt{3}}$ は標準正規分布に従う．

$$\begin{aligned}P(W > 1000) =& P\left(\frac{W-990}{15\sqrt{3}} > \frac{1000-990}{15\sqrt{3}}\right)\\ =& P\left(Z > \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = P(Z > 0.38)\\ =& 0.5 - I(0.38) = 0.5 - 0.148 = \underline{0.352}.\end{aligned}$$

(3) 求めるものは $P(X < Y)$，すなわち $P(X - Y < 0)$ である．$X - Y$ も正規分布に従うが，その期待値，分散は

$$\begin{aligned}E(X-Y) =& E(X) - E(Y) = 330 - 280 = 50,\\ V(X-Y) =& V(X) + (-1)^2 V(Y) = 15^2 + 10^2 = 325\end{aligned}$$

であるから，$Z = \frac{(X-Y)-50}{\sqrt{325}} = \frac{(X-Y)-50}{5\sqrt{13}}$ は標準正規分布に従うことがわかる．したがって，

$$\begin{aligned}P(X - Y < 0) =& P\left(\frac{(X-Y)-50}{5\sqrt{13}} < \frac{0-50}{5\sqrt{13}}\right)\\ =& P\left(Z < -\frac{10}{\sqrt{13}}\right) = P(Z < -2.77)\\ =& 0.5 - I(2.77) = 0.5 - 0.4972 = \underline{0.0028}.\end{aligned}$$