確率統計 第 3 回小テスト 解答

$\boxed{1}$

(1) 確率関数の値をすべてたすと 1 になるので，$p = 0.3$ である．
$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 0.1 + 0.6 + 0.9 + 0.8 = \underline{2.4}$.
$E(X^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 0.1 + 1.2 + 2.7 + 3.2 = 7.2$.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7.2 - (2.4)^2 = 7.2 - 5.76 = \underline{1.44}$.

(2) 期待値と分散の性質（教科書 p.38）を利用する．

(a) $E(2X) = 2E(X) = \underline{2\mu}$.

(b) $E(X^2+3X+1) = E(X^2)+3E(X)+1 = \left\{E(X^2) - (E(X))^2\right\} + (E(X))^2 + 3E(X) + 1$
$= V(X) + (E(X))^2 + 3E(X) + 1 = \underline{\sigma^2 + \mu^2 + 3\mu + 1}$.

(c) $V(3X+1) = 3^2 V(X) = \underline{9\sigma^2}$.

$\boxed{2}$

		Y 0	1	2	3	
X	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$
	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

(1) 周辺分布は右上の表を参照.

(2) X と Y は独立である．なぜなら，すべての $i = 0,1,2$ と $j = 0,1,2,3$ に対し，$P(X = i, Y = j) = P(X = i) \times P(Y = j)$ が成り立つから.

(3) X と Y の期待値，分散を求める;
$E(X) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{4}{3}$.
$E(X^2) = \frac{1}{6} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 = \frac{7}{3}$. $V(X) = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.
$E(Y) = \frac{1}{10} \times 0 + \frac{1}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 + \frac{2}{5} \times 3 = 2$.
$E(Y^2) = \frac{1}{10} \times 0^2 + \frac{1}{5} \times 1^2 + \frac{3}{10} \times 2^2 + \frac{2}{5} \times 3^2 = 5$. $V(Y) = 5 - 2^2 = 1$.
以上のことから，$E(2Y - X) = 2E(Y) - E(X) = 2 \times 2 - \dfrac{4}{3} = \underline{\dfrac{8}{3}}$.
X と Y は独立だから，$V(2Y - X) = 2^2 V(Y) + (-1)^2 V(X) = 4 + \dfrac{5}{9} = \underline{\dfrac{41}{9}}$.

（実施日：2013.11.22 担当：佐藤）

確率統計 第 3 回小テスト 解答

$\boxed{3}$

(1) ${}_6C_3 = \dfrac{6!}{3! \times (6-3)!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = \underline{20}.$

赤玉を R_1, R_2，青玉を B，白玉を W_1, W_2, W_3 で表し，標本点をすべて書き下すと，

$$
\begin{aligned}
S = \{&(B,R_1,R_2),(B,W_1,W_2),(B,W_2,W_3),(B,W_3,W_1),\\
&(B,R_1,W_1),(B,R_1,W_2),(B,R_1,W_3),(B,R_2,W_1),(B,R_2,W_2),(B,R_2,W_3),\\
&(R_1,R_2,W_1),(R_1,R_2,W_2),(R_1,R_2,W_3),(W_1,W_2,W_3),\\
&(R_1,W_1,W_2),(R_1,W_2,W_3),(R_1,W_3,W_1),(R_2,W_1,W_2),(R_2,W_2,W_3),(R_2,W_3,W_1)\}
\end{aligned}
$$

(2) 「赤玉が 1 個，白玉が 2 個」となるのは，以下の $2 \times {}_3C_2$ 通りある;

$(R_1,W_1,W_2),(R_1,W_2,W_3),(R_1,W_3,W_1),(R_2,W_1,W_2),(R_2,W_2,W_3),(R_2,W_3,W_1).$

したがって，確率は $\dfrac{6}{20} = \underline{\dfrac{3}{10}}$

(3) 同時確率分布表は以下のようになる;

		Y=0	Y=1	Y=2	Y=3	
X	0			$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$
	1		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$		$\frac{3}{5}$
	2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$			$\frac{1}{5}$
		$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

(4) 独立ではない.

たとえば, $P(X=1, Y=1) = \frac{6}{20}$ であるが, $P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{3}{5} \times \frac{9}{20} = \frac{27}{100} \ (\neq \frac{6}{20})$.

(5) $Z = X + Y$ の確率分布は，$P(Z=2) = P(Z=3) = \frac{1}{2}$ である．したがって，

$E(Z) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = \underline{\frac{5}{2}}$.

$E(Z^2) = 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

$V(Z) = \frac{13}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{4}}$

$\boxed{4}$ $E(X) = 1.85,\ \sqrt{V(X)} = 1.24,\ E(Y) = 2.12,\ \sqrt{V(Y)} = 1.56$

(1) $Z = \frac{1}{2}(X+Y)$ である.

$E(Z) = \frac{1}{2}(E(X) + E(Y)) = \frac{1}{2}(1.85 + 2.12) = \frac{1}{2} \times 3.97 = \underline{1.985\ (\text{台})}$.

X と Y は独立であるから,

$\sqrt{V(Z)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (V(X) + V(Y))} = \frac{1}{2}\sqrt{(1.24)^2 + (1.56)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3.9712} = \sqrt{0.9928}$

$= \underline{0.996\ (\text{台})}$.

(2) $W = 12 + 3X$ である.

$E(W) = 12 + 3E(X) = 12 + 3 \times 1.85 = 12 + 5.55 = \underline{17.55\ (\text{円})}$.

$\sqrt{V(W)} = \sqrt{3^2\, V(X)} = 3\sqrt{V(X)} = \underline{3.72\ (\text{円})}$.