確率統計 中間試験 解答

$\boxed{1}$

(1) データのサイズが 40 だから，メディアンは 20 番目に小さいメンバー $x'_{(20)}$ と 21 番目に小さいメンバー $x'_{(21)}$ の平均である（1 点）．累積度数は

階級値	15	25	35	45	55	65	75	（合計）
度数	3	4	8	11	10	3	1	40
累積度数	**3**	**7**	**15**	**26**	**36**	**39**	**40**	

となるので，$x'_{(20)}$ と $x'_{(21)}$ は階級値 45 の階級（40〜50）に含まれる（1 点）．階級値 35 までの累積度数が 15 なので，

$$
\begin{aligned}
x'_{(16)} &= 40 + \frac{H}{2}\\
x'_{(17)} &= 40 + \frac{H}{2} + H\\
&\vdots\\
x'_{(20)} &= 40 + \frac{H}{2} + 4H\\
x'_{(21)} &= 40 + \frac{H}{2} + 5H\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となる（ただし，$H = \frac{(\text{階級の幅})}{(\text{階級値 45 の度数})} = \frac{10}{11}$）．したがって，メディアンは $\frac{1}{2}(x'_{(20)} + x'_{(21)}) = \frac{1}{2}(80 + 10H) = 40 + 5H = 40 + \frac{50}{11} = \underline{44.55}$．（2 点）

(2) 与えられたデータを小さい順に並べると

$$3,\ 8,\ 10,\ 2,\ 6,\ 8,\ 6,\ 6,\ 21,\ 2 \quad \to \quad 2,\ 2,\ 3,\ 6,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8,\ 10,\ 21$$

となる（1 点）．データのサイズは 10 だから，Q_1 は $3(=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 10)$ 番目のメンバー，Q_3 は $8(=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times 10)$ 番目のメンバーである（各 1 点）．したがって，四分偏差は $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(8-3) = \underline{2.5}$．（1 点）

$\boxed{2}$

- $\boxed{\bigcirc}$ $\boldsymbol{r(x,y)}$ の値は -1 以上，1 以下である．
- $\boxed{\times}$ $|r(x,y)|$ の値が 1 に近いほど $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の類似性は強く（1＋1 点），0 に近いほど弱い（2 点）．
- $\boxed{\times}$ $z = ax + b$，$w = ky + h$ に対し，変換公式 $r(z,w) = r(x,y)$ が成り立つ．
- $\boxed{\times}$ x と y の回帰直線の方程式は $\dfrac{y-\bar{y}}{\sigma(y)} = r(x,y)\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma(x)}$ であるので，$r(x,y)$ と回帰直線の傾きとは異なる．

確率統計 中間試験 解答

3 （平均と分散について）以下の方法で計算しなくても正解であれば，平均は 3 点，分散は 2 点を加点．答えが正しくなくても平均と分散の定義式が書かれていれば，それぞれ 2 点加点．

- x と z，y と w の数値を比較することにより $\underline{x = z + 170}$，$\underline{y = w + 60}$ であることがわかる．（各 1 点）
- データのサイズは 10 であるから，$\bar{z} = \dfrac{-4}{10} = \underline{-\dfrac{2}{5}}\,(= -0.4)$，$\bar{w} = \dfrac{10}{10} = \underline{1}$．（各 1 点）
- $\sigma^2(z) = \dfrac{804}{10} - \left(-\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{402}{5} - \dfrac{4}{25} = \underline{\dfrac{2006}{25}}$，$\sigma^2(w) = \dfrac{80}{10} - 1^2 = \underline{7}$．（各 1 点）
- 変換公式より，$\bar{x} = \bar{z} + 170 = -0.4 + 170 = \underline{169.6}$，$\sigma^2(x) = \sigma^2(z) = \underline{\frac{2006}{25}}$．（各 1 点）
- 変換公式より，$\bar{y} = \bar{w} + 60 = 1 + 60 = \underline{61}$，$\sigma^2(y) = \sigma^2(w) = \underline{7}$．（各 1 点）

（相関係数について）解が正しくなくても定義式が書かれていれば，2 点加点．

- $C(z, w) = \dfrac{200}{10} - \left(-\dfrac{2}{5}\right) \times 1 = 20 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{102}{5}$．したがって，

$$r(x, y) = r(z, w) = \frac{C(z, w)}{\sigma(z)\,\sigma(w)} = \frac{102}{5} \times \sqrt{\frac{25}{2006}} \times \sqrt{\frac{1}{7}} = \underline{\frac{102}{\sqrt{14042}}}.$$

4

(1) 確率変数の期待値，分散の定義を理解していると判断出来る場合は各 2 点加点．
$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 0.1 + 0.6 + 0.9 + 0.8 = \underline{2.4}$.
$E(X^2) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 0.1 + 1.2 + 2.7 + 3.2 = 7.2$.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7.2 - 2.4^2 = 7.2 - 5.76 = \underline{1.44}$.

(2) 2 個のサイコロを投げる試行の標本空間は $S = \{(a, b) \mid 1 \leq a, b \leq 6\}$ [*1]，標本点の個数は 36 である．出た目の平均が 2 （ただし，小数第一位を四捨五入するので，目の和が 3 または 4 となる場合）となる事象は

$$\{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

である．したがって，$\underline{P(X = 2) = \dfrac{5}{36}}$.

(3) $E(X) = \mu$，$V(X) = \sigma^2$．分散の簡便計算より，$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(Y) - \mu^2$．したがって，$\underline{E(Y) = \sigma^2 + \mu^2}$.

(4) $f(x)$ が確率密度関数ならば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ が成り立つ（1 点）．

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} k(1 - x^2)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = k\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2k}{3}.$$

したがって，$\underline{k = \dfrac{3}{2}}$ である．（2 点）

[*1] 2 個のサイコロを A と B とすると，A の目が a で，B の目が b となる標本点を (a, b) と表している．

（実施日：2013.11.8 担当：佐藤）