

確率統計：統計的検定に関する問題（考え方）

すべて 危険率 0.05 で検定する。

問題 0.1.

帰無仮説 H_0 : 奇数の目が出る確率は $p = \frac{1}{2}$ である。

対立仮説 H_1 : $p > \frac{1}{2}$ である。

1000 回サイコロを振るとき、奇数の目が出る回数を X とすると、 X は二項分布 $\text{Bin}\left(\frac{1}{2}, 1000\right)$ に従う。この分布の期待値と分散は $E(X) = 500$, $V(X) = 250$ であり、かつ $n = 1000$ は十分大きいので、 X は近似的に正規分布 $N(500, 250)$ に従うと考えて良い。

奇数の目が 542 回以上でるときの確率は

$$\begin{aligned} P(X \geq 542) &= P\left(\frac{X - 500}{5\sqrt{10}} \geq \frac{542 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P\left(Z \geq \frac{42}{5\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 2.66) \\ &= 0.5 - I(2.66) = 0.5 - 0.4961 = 0.0039^{*1} (< 0.05) \end{aligned}$$

であるから、帰無仮説「 $p = \frac{1}{2}$ 」は棄却される（つまり、この人に「PK の能力がない」とは言えない）。

問題 1.

「精神的遠隔操作 (PK)」の問題では、「奇数の目だけを出すように念じながら 1 個のサイコロを 1000 回振り、奇数の目が 542 回」では、危険率 0.05 なら帰無仮説「PK 能力はない」が棄却された。では、奇数の目が何回までなら、同様に帰無仮説「PK 能力はない」は棄却されるだろうか？

問題 0.2.

帰無仮説 H_0 : A 氏はワインの銘柄を区別する能力がない（各グラスの前にカードを並べる並べ方は、どれも同様に確からしい）。

対立仮説 H_1 : A 氏はワインの銘柄を区別する能力がある。

3 つのグラスの前に銘柄の名称が書かれたカードを並べる組み合わせは全部で 6 (= 3!) 通りである。したがって、正しく並べる確率は $\frac{1}{6} = 0.167 (> 0.05)$ である。したがって、帰無仮説「ワインの銘柄を区別する能力がない」は採択される（つまり、「ワインの銘柄を区別する能力がある」とは言えない）。

確率統計：統計的検定に関する問題（考え方）

問題 2.

「利きワイン」の問題では、「3つの銘柄のワインと3つのカードと対応させる」場合では、たとえ全て当てたとしても、危険率 0.05 なら「ワインの銘柄を区別する能力がある」とは言えなかった。では、1枚のダミーカードを入れて、「4つのカードから正しい3つのカードを選んで、3つの銘柄のワインと対応させる」とすれば、「ワインの銘柄を区別する能力がある」と言えることを説明しなさい。

問題 0.3.

2つの標本は 22ml と 32ml なので、シングルの平均は 30ml 以下であることが推測される。そこで、

帰無仮説 H_0 : シングル 1 杯の平均は $\mu > 30$ である。

対立仮説 H_1 : $\mu \leq 30$ である。

として、検定する。

標本平均は $\bar{x} = \frac{1}{2}(22 + 32) = 27$ 、不偏分散は $u^2 = \frac{1}{2-1}((22-27)^2 + (32-27)^2) = 50$ である。 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{u/\sqrt{2}}$ は自由度 1 の t 分布に従うので、

$$P(\mu > 30) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{u/\sqrt{2}} < \frac{27 - 30}{\sqrt{50}/\sqrt{2}}\right) = P(t < -0.6) > 0.05$$

を得る。したがって、帰無仮説「 $\mu > 30$ 」は採択される（つまり、この2つのサンプルだけでは、「シングルが 30ml 以下だ」と店にクレームを入れることはできない）。

問題 0.4.

帰無仮説 H_0 : ショウジョウバエはブランデーとウイスキーを区別できない（25:25 に分かれるのが理想である）。

対立仮説 H_1 : ブランデーとウイスキーを区別できる。

理想の値と現実の値の食い違いの測度は

$$T = \frac{(28 - 25)^2}{25} + \frac{(22 - 25)^2}{25} = \frac{18}{25} = 0.72$$

である（理想の値から離れるにつれ、この値が大きくなることに注意せよ）。この値は自由度 1 の χ^2 分布に従うが、 $\chi^2(1)$ のパーセント点表から $P(T \geq 3.82) = 0.05$ である。よって、 $P(T \geq 0.02) \geq P(T \geq 3.82) = 0.05$ より、帰無仮説「ブランデーとウイスキーを区別できる」は採択される（つまり、この結果から「ショウジョウバエがブランデーとウイスキーを区別できる」とは言えない）。