数学科教育法 前期末試験 解答（および配点）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 各 2 点（$\times 6 = 12$ 点）．何も説明がないものは 1 点減点．

(1)
- 三角関数の性質より，任意の実数 x に対して，$-1 \leq \sin x \leq 1$ が成り立つ．よって，$\{a_n\}$ も任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $-1 \leq a_n \leq 1$ を満たす．したがって，$\underline{\{a_n\} \text{ は有界である}}$．
- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$c_n < c$ を満たす c が存在すると仮定する．すると，$n < \frac{5}{2} + \sqrt{c + \frac{5}{4}}$ となり，これはいくらでも大きい自然数が存在することに矛盾する．したがって，$\underline{\{c_n\} \text{ は有界でない}}$．

(2)
- $f(x) = \log_e x$ は増加関数だから，$b_n = \log_e \left(\dfrac{1}{n}\right) = -\log_e n > -\log_e(n+1) = b_{n+1}$．したがって，$\{b_n\}$ は $\underline{\text{単調減少数列}}$ である．
- $\{c_n\}$ は $c_1 = 1$，$c_2 = -1$，$c_3 = -1$，$c_4 = 1$，$c_5 = 5, \ldots$ であるから，$\underline{\text{単調増加数列でも単調減少数列でもない}}$．

(3) $a_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos(n\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos(n\pi)$ であるから，$|a_n| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{\pi}{n}$．したがって，$N > \frac{\pi}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N をひとつとれば（ε は任意に選ぶ），$n \geq N$ に対して，$|a_n| < \varepsilon$ となる．これは $\underline{\text{数列 } \{a_n\} \text{ が } 0 \text{ に収束すること}}$ を意味する．

(4) $X = \{1,\ -1,\ -1,\ 1, 5, \ldots\}$ である．また，$c_{n+2} - c_{n+1} = 2(n-1) \geq 0$ であるから，$\{c_n\}$ は第 2 項以降，単調増加数列となる．したがって，$\underline{X \text{ の最小値は } -1}$ である．(2) の結果から，$\underline{X \text{ の最大値は存在しない}}$．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 6 点．

(a) 第 3 回レポートの課題 **3-2** の解答を参照せよ．

(b) 第 7 回レポートの課題 **7-2** の解答を参照せよ．

(c) 第 8 回レポートの課題 **8-1** の解答を参照せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}\boxed{\mathbf{4}}\boxed{\mathbf{5}}$ 合わせて 12 点．

（**2013.7.24** 担当：佐藤）