数学科教育法 レポート⑨ 解答

課題 9-1 実数の部分集合の組 (A, B) で次の条件を満たすものを，実数の切断という．

(1) $A \neq \emptyset$，$B \neq \emptyset$

(2) $A \cup B = \mathbb{R}$

(3) $A \cap B = \emptyset$

(4) 任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対し，$a < b$ が成り立つ．

課題 9-2

(1) $A = \{x \,|\, x$ は有理数 $\}$，$B = \{x \,|\, x$ は無理数 $\}$

これは 切断ではない．なぜなら，上の定義の (4) を満たさないから（$1 < \sqrt{2} < 2$）．

(2) $A = \{x \,|\, x < 0\}$，$B = \{x \,|\, x > 0\}$

これは 切断ではない．なぜなら，上の定義の (2) を満たさないから（$0 \notin A \cup B$）．

(3) $A = \{x \,|\, x \leq 0\}$，$B = \{x \,|\, x \geq 0\}$

これは 切断ではない．なぜなら，上の定義の (3) を満たさないから（$0 \in A \cap B$）．

課題 9-3

実数の「連続性の公理」とは，任意の切断 (A, B) に対して，次のうちどちらかが必ず成り立つことである；

- A に最大値が存在し，B に最小値が存在しない，
- A に最大値が存在せず，B に最小値が存在する．

次のような有理数の切断

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq \sqrt{2}\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > \sqrt{2}\}$$

を考えると，A の最大値も，B の最小値も存在しない．このことから有理数の集合は「連続性」を満たさない．

（**2013.6.12** 担当：佐藤）