数学科教育法 レポート⑧ 解答

課題 8-1

定義 0.1.

(1) 「**0**」とは，任意の数 a に対し，$a+0=0+a=a$ を満たす数である．

(2) 数 a の対し，$a+a'=a'+a=0$ を満たす数 a' を a の逆符号の数とよび，$a'=-a$ と書く．

(3) （減法の定義）$c=a-b$ を $a=c+b$ を満たす数と定義する．

定理 0.2. $a-a=0$

Proof. 0 の定義と減法の定義から明らか． □

定理 0.3. $a+(-b)=a-b$.

Proof. $c=a+(-b)$ とおく．すると，$c+b=(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a$．したがって，減法の定義より，$c=a-b$ となる． □

定理 0.4. 任意の数 a に対し，$a\times 0=0\times a=0$.

Proof. $a\times 0=c$ とおく．$0+0=0$ であるから，$c=a\times 0=a\times(0+0)=a\times 0+a\times 0=c+c$．したがって，$c=c-c=0$ を得る． □

定理 0.5. $(-a)\times b=-(a\times b)$.

Proof. $(a+(-a))\times b=0\times b=0$．一方，$(a+(-a))\times b=a\times b+(-a)\times b$．したがって，$a\times b+(-a)\times b=0$ となり，$(-a)\times b$ は $a\times b$ の逆符号の数であることがわかる．すなわち，$(-a)\times b=-(a\times b)$． □

定理 0.6. $(-a)\times(-b)=a\times b$.

Proof. $(-a)\times((-b)+b)=(-a)\times 0=0$．一方，$(-a)\times((-b)+b)=(-a)\times(-b)+(-a)\times b=(-a)\times(-b)+(-(a\times b))=(-a)\times(-b)-(a\times b)$．したがって，$(-a)\times(-b)-(a\times b)=0$ となり，$(-a)\times(-b)=a\times b+0=a\times b$ を得る． □

課題 8-2 「有理数の稠密性」とは，「任意の有理数 $a<b$ に対し，$a<c<b$ を満たす有理数 c が存在すること」である．実際に $\underline{\frac{1}{2}(a+b) \text{ は有理数}}$ で $\underline{a<\frac{1}{2}(a+b)<b}$ を満たす（$\frac{1}{2}(a+b)$ は a と b の中点である）．

（**2013.6.5** 担当：佐藤）