東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第 6 回
§1) 数学とはどのような学問か（5）

有限集合と無限集合，集合の濃度

担当：佐藤 弘康

（前回のつづき）

- 2 つの集合 X と Y の元が 1 つも余すことなくペアにできるならば，その集合の元の「個数」は同じであると考えてよいであろう.
- これは全単射 $f : X \to Y$ が存在することを意味する.

- 集合 X, Y に対し，全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき，「X と Y は同等である」といい，$X \approx Y$ と書く.

- $X \approx \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき，X を有限集合という.
- 有限集合 X と Y が同等ならば，2 つの集合の元の数は同じである.

「集合の元の個数」の概念を無限集合の場合にも適用できるよう定義する.

集合の濃度

「集合全体の集まりを同等関係 “≈” によって類別した各同値類を濃度という」

- 集合 A の濃度を $|A|$ と書く.
- $A \approx B$ ならば, $|A| = |B|$ とする.
  (2 つの集合の間に全単射が存在すれば，その集合は同じ濃度を持つと定義する)
- 有限集合 $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ の場合はその濃度を k（元の個数）とする.
- $|\emptyset| = 0$ とする.
- 濃度に大小関係を定義する；
  「$A \subset B$」または「A が B' $(\subset B)$ と同等」ならば $|A| \leq |B|$ とする.

可算濃度

$\boxed{\text{可算（可付番）の濃度 } \aleph_0}$ ：自然数の集合 $\mathbb{N}$ と同等な集合の濃度.

$\mathbb{N}$ と同等な集合のことを可算集合（可付番集合）という.

例）以下の集合はすべて自然数の集合 $\mathbb{N}$ からの全単射が構成可能.

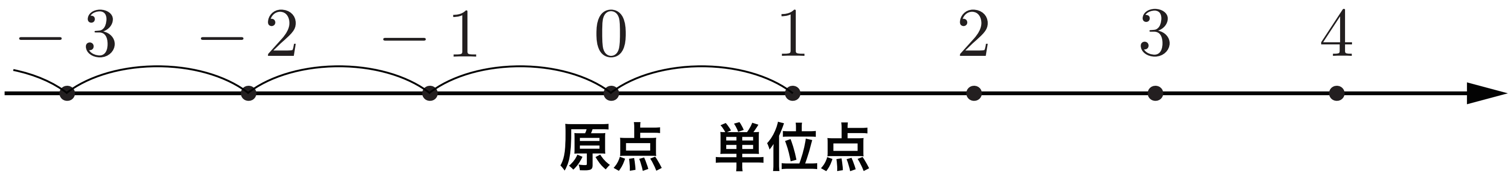
- 可算集合 A に有限個の元を加えた集合 $A \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$
- 可算集合 A, B の和 $A \cup B$
- 整数の集合 $\mathbb{Z}$ $(= \{-1, -2, -3, \ldots\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N})$
- 可算集合 A, B の直積 $A \times B$
- 有理数の集合 $\mathbb{Q}$

実数の集合 $\mathbb{R}$ は可算集合だろうか？

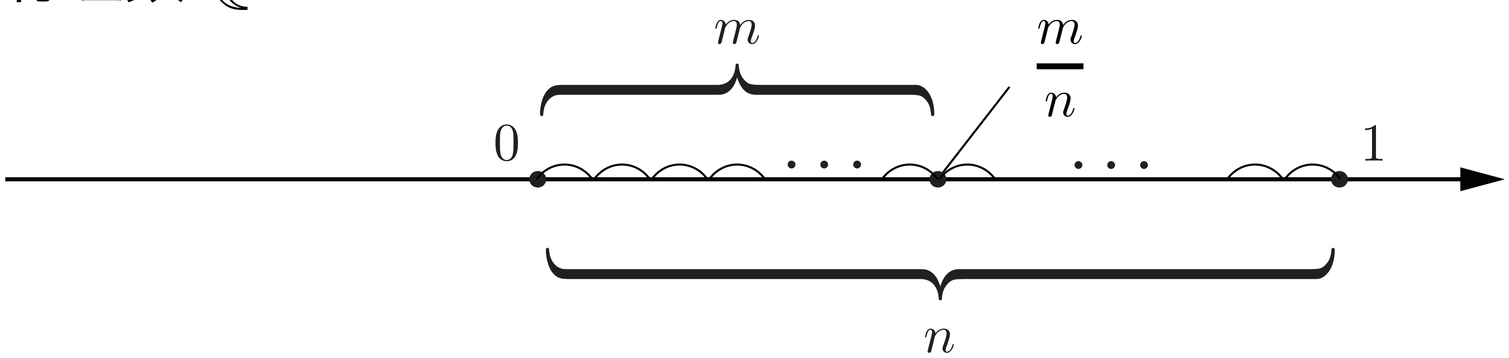
実数とは

$\boxed{\text{実数 } \mathbb{R}}$：数直線上の点に対応する数.

- 自然数 $\mathbb{N}$
- 整　数 $\mathbb{Z}$



- 有理数 $\mathbb{Q}$



- 無理数は有理数以外の数直線上の点に対応する数.

（少数表示したとき，循環小数でない数）

$\mathbb{N}$ の濃度と $\mathbb{R}$ の濃度

実数の集合 $\mathbb{R}$ の濃度を考える.

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ より，$\aleph_0 \leq |\mathbb{R}|$.
- 開区間 $(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$ と $\mathbb{R}$ は同等である.

  なぜなら…
  - 任意の 2 つの開区間 (a, b) と (c, d) は同等である.
  - 写像 $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \tan x$ は全単射である.

    したがって，$\mathbb{R}$ と $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \approx (0, 1)$ は同等である.

しかし,

- $\mathbb{N}$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射は存在しない.

  (したがって，$\mathbb{R}$ の濃度は $\aleph_0$ より真に大きい)

カントールの対角線論法

定理

$\mathbb{N}$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射は存在しない.

証明：背理法（カントールの対角線論法）で示す.

仮に全単射 $\varphi : \mathbb{N} \to (0, 1)$ が存在したとする．$k \in \mathbb{N}$ の像 $\varphi(k)$ を

$$\varphi(k) = 0.\, a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3}\, \cdots$$

と小数表示する．つまり，$a_{kl} \in \{n \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq n \leq 9\}$ で,

$$0.\, a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3}\, \cdots = 0.1 \times a_{k1} + 0.01 \times a_{k2} + 0.001 \times a_{k3} + \cdots$$

カントールの対角線論法

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) &= 0.\,{\color{blue}a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ \cdots \\
\varphi(2) &= 0.\,a_{21}\ {\color{blue}a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ \cdots \\
\varphi(3) &= 0.\,a_{31}\ a_{32}\ {\color{blue}a_{33}}\ a_{34}\ a_{35}\ \cdots \\
\varphi(4) &= 0.\,a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ {\color{blue}a_{44}}\ a_{45}\ \cdots \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

ここで，$b = 0.\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4\ \cdots \in (0,1)$ を次のように定める；

$$
b_i = \begin{cases} 7 & （a_{ii}\text{ が偶数}） \\ 8 & （a_{ii}\text{ が奇数}） \end{cases}
$$

すると，$b \notin \varphi(\mathbb{N})$ である．これは $\varphi : \mathbb{N} \to (0,1)$ が全単射であるという仮定と矛盾する．（証明終）

連続濃度

$\boxed{\text{連続濃度 } \aleph}$ ：実数の集合 $\mathbb{R}$ と同等な集合の濃度.

- $\aleph_0 < \aleph$
- 無理数の集合の濃度も $\aleph$.

  なぜなら $\cdots$

  - $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x \mid x$ は無理数 $\}$. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ であるから，無理数の集合の濃度も $\aleph_0$ なら，$|\mathbb{R}| = \aleph_0$ となってしまう.
  - 一般に「A を無限集合，$B \subset A$ をたかだか可算（有限集合か可算集合）な部分集合とする．このとき，$A - B$ が無限集合ならば $|A| = |A - B|$」が成り立つ.
- 平面 $\mathbb{R}^2 \, (= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ と直線 $\mathbb{R}$ は同じ濃度を持つ.
  - $\mathbb{R} \approx (0, 1) \approx (0, 1) \times (0, 1) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

いくつかの問題

- $\aleph_0$ と $\aleph$ の間の濃度は存在するのか？（連続体仮説）
  （$\aleph_0 < |A| < \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？）
  - 答え：わからない！
  - 標準的な枠組み（公理系）のもとでは「正しいとも偽であるとも証明することができない」ことが証明されている.

- $\aleph$ より真に大きい濃度は存在するのか？
  （$|A| > \aleph$ を満たす集合 A は存在するのか？）
  - 答え：存在する！
  - 冪集合によって構成できる.

冪集合

- A の冪集合とは,「A のすべての部分集合」の集合のこと（2^A と書く）.
  - 例） $A = \{a,\ b,\ c\}$ の冪集合 2^A は
    $$\emptyset,\quad \{a\},\quad \{b\},\quad \{c\},\quad \{a,b\},\quad \{a,c\},\quad \{b,c\},\quad \{a,b,c\}\ (= A)$$
    の $8\ (= 2^3)$ 個
- 冪集合は「A から $\{0,1\}$ への写像の全体」と同一視できる.
  つまり, $2^A \approx \{\varphi \,|\, \varphi : A \to \{0,1\}\,\}$
  （$\varphi : A \to \{0,1\}$ に対し, $\{x \in A \,|\, \varphi(x) = 1\} \subset A$ を対応させる）
  - 例）上の例の $\{a,c\} \subset A$ は写像 $\varphi : A \to \{0,1\}$；
    $$\varphi(a) = 1,\quad \varphi(b) = 0,\quad \varphi(c) = 1$$
    に対応する.

幕集合

定理

任意の集合 A に対して，$|A| < |2^A|$ が成り立つ.

証明）A から 2^A への単射は存在する（$x \mapsto \{x\}$）. A から 2^A への全射が存在しないことを背理法で示す.

全射 $g : A \to 2^A$ が存在したとする.

$$B = \{x \mid x \notin g(x)\}$$

とおくと $B \in 2^A$ だから，g の全射性より $g(a) = B$ となる $a \in A$ が存在する.

- $a \in B$ ならば，$a \notin g(a)\,(= B)$ ：矛盾！
- $a \notin B$ ならば，$a \in g(a)\,(= B)$ ：矛盾！（証明終）

冪集合

定理

任意の集合 A に対して，$|A| < |2^A|$ が成り立つ.

- 上の定理から「いくらでも大きい濃度をもつ集合が存在する」ことがわかる.
- $2^{\mathbb{N}}$ の濃度は？
  - $\aleph_0$ よりは真に大きい．では $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph$？
  - 全単射 $f : 2^{\mathbb{N}} \to (0, 1)$ が存在する.

集合論におけるパラドクス

ラッセルのパラドクス

- 自分自身を要素として含まない集合を A-集合
- 自分自身を要素として含む集合を B-集合

とよぶ．このとき，A-集合の全体 S は A-集合でも B-集合でもない．

- S が A-集合であるとする．
  - A 集合の定義から $S \notin S$.
  - S の定義から $S \in S$.
- S が B-集合であるとする．
  - B-集合の定義から $S \in S$ （これは S が A-集合の全体の集合であることと矛盾）.

集合論におけるパラドクス

床屋のパラドックス（ラッセルのパラドクスの喩え話）

ある村でたった一人の床屋は,

- 自分で髭を剃らない人全員の髭を剃り,
- それ以外の人（自分で髭を剃る人）の髭は剃らない.

では，床屋自身の髭は誰が剃るのだろうか？

- 床屋が自分の髭を剃らなければ，彼は規則に従って髭を自分で剃らなくてはいけなくなり，矛盾.
- 床屋が自分の髭を剃るならば，「自分で髭を剃らない人の髭を剃る」という規則に矛盾.

集合論におけるパラドクス

カントールのパラドクス

すべての「集合」の集合を Y とする．このとき，Y の冪集合 2^Y は「集合」ではない．

（教科書 p.22 を参照）

$\boxed{\text{素朴集合論}}$ 公理を特定せずに議論を進める．

$\boxed{\text{公理的集合論}}$ 公理を定めて厳密に議論を展開（パラドクスを回避）．

公理的集合論

$\boxed{\text{ZF 公理系}}$：ツェルメロが作ったものをフレンケルとスコーレムが改良

- 外延性の公理：A と B が全く同じ要素を持つのなら A と B は等しい.
- 空集合の公理：要素を持たない集合が存在する.
- 対の公理：任意の集合 x, y に対して，x と y のみを要素とする集合が存在する.
- 和集合の公理：任意の集合 X に対して，X の要素の要素全体からなる集合が存在する.
- 無限公理：空集合を要素とし，任意の要素 x に対して $x \cup \{x\}$ を要素に持つ集合が存在する.
- 冪集合の公理：任意の集合 X に対して X の部分集合全体の集合が存在する.
- 置換公理：”関数クラス”による集合の像は集合である.
- 正則性公理（基礎の公理）；空でない集合は必ず自分自身と交わらない要素を持つ.

公理的集合論

$\boxed{\text{ZFC 公理系}}$ ＝ ZF 公理系＋「選択公理」

選択公理

X が互いに交わらないような空でない集合 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の集合であるとする．つまり，

$$X = \{A_\lambda \,|\, A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset \; (\lambda \neq \lambda')\}$$

このとき，X の各要素 A_λ から一つずつ要素をとってきたような集合（選択集合）が存在する

公理的集合論

- 「すべての集合に濃度が定義できる」ためには選択公理が必要.
- ラッセルのパラドクスにある「集合 S」は ZFC 公理系では構成不可能.

- ZF 公理系が無矛盾 $\Longrightarrow$ ZFC 公理系も無矛盾.
  「公理系が矛盾している」とは,「P も $\neg P$ も証明可能」な命題 P が存在すること.

- ZFC 公理系が無矛盾 $\Longrightarrow$ ZFC 公理系＋「連続体仮説」も無矛盾.
- ZFC 公理系が無矛盾 $\Longrightarrow$ ZFC 公理系＋「連続体仮説の否定」も無矛盾.
  （つまり，ZFC 公理系では連続体仮説が真とも偽とも言えない）

参考文献

- 「集合・位相入門」松坂和夫 著（岩波書店）
- 「選択公理と数学」田中尚夫 著（遊星社）
- 「岩波数学辞典 第４版」日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia ：集合，濃度，他