数学科教育法 レポート⑥ 解答

$\boxed{\text{課題 6-1}}$ 「集合 A, B が同じ濃度をもつ」とは，A から B（または B から A）への全単射が存在するということ．

$\boxed{\text{課題 6-2}}$

- 次の各集合はすべて可算集合である；
  - $A = \mathbb{N}$，$B = \mathbb{Z}$
  - $A = \mathbb{Z}$，$B = \mathbb{Q}$
  - $A = \{m \mid m = 2n-1, n \in \mathbb{N}\}$，$B = \mathbb{N}$
  - $A = \{m \mid m = 2n, n \in \mathbb{N}\}$，$B = \mathbb{N}$
  - $A = \{p \mid p$ は素数 $\}$，$B = \mathbb{N}$
- 次の各集合はすべて連続濃度をもつ；
  - 開区間 $A = (a, b)$，$B = \mathbb{R}$
  - $A = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a \notin \mathbb{Q}\} = \{a \mid a$ は無理数 $\}$，$B = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{課題 6-3}}$ 平面の 2 点 (a, c)，(b, d) を通る直線の方程式を $y = f(x)$ とすると，$f : (a, b) \to (c, d)$ は全単射を与える．

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c.$$

開区間の表記と点の座標の表記を混同しないように注意せよ（違いは文脈で判断）．

$\boxed{\text{課題 6-4}}$

(1) 例えば，$\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ などは代数的数である（それぞれ方程式 $x^2-2=0$，$x^2-2x-1=0$，$x^6-2x^3-1=0$ の解である）．

(2) 代数的数全体の集合の濃度は $\aleph_0$ である．
(考え方)「整数係数の n 次方程式全体の集合」は対応

$$a_nx^n + a + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \ \longmapsto (a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0)$$

によって，$\mathbb{Z}^{n+1}$ と同一視できる（この対応は全単射である．さらに $\mathbb{Z}^{n+1}$ は $\mathbb{Z}$ と同等なので濃度は $\aleph_0$）．
$a_nx^n + a + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ の（実数）解は高々 n 個なので，「整数係数の n 次方程式の実数解となる代数的数の集合」も濃度は $\aleph_0$ である．

（**2013.5.22** 担当：佐藤）