

数学科教育法 レポート⑤の解答

課題 5-1 写像 $f: X \rightarrow Y$ の値域とは「 $f(x)$ と表される元の全体のなす集合 (Y の部分集合)」のこと. 内包的方法で表すと $\{y \mid y = f(x), x \in X\}$.

課題 5-2 $y = f(x)$ のグラフを描き, y のとり得る範囲を調べれば良い.

- (1) \mathbb{R} (ただし, この関数は定義域を \mathbb{R} 全体とすることはできない. なぜなら, 定義できない点 (例えば $x = \frac{\pi}{2}$) があるからである. 定義域を開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ などにすれば, この写像は定義可能である).
- (2) $(0, +\infty) = \{y \mid y > 0\}$.
- (3) $f(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \leq 4$ より, $(-\infty, 4] = \{y \mid y \leq 4\}$.

課題 5-3 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射のとき, 逆写像が定義可能である. $y \in Y$ に対して, $y = f(x)$ となる $x \in X$ を対応させる写像 $g: Y \rightarrow X$ を f の逆写像といい, $g = f^{-1}$ と書く.

課題 5-4

- (1) f の値域は $[0, +\infty)$ だから, 終域を $[0, +\infty)$ にすると, 全射になる.
- (2) $f(a) = f(b)$ ならば $b = -a$ であるから, 例えば定義域を $[0, \infty)$ に制限すれば, f は単射になる.

課題 5-5

- (1) 偶数全体の集合 S は $S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と表すことができる. したがって, $f(n) = 2n$ で定める写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ は全単射である.
- (2) 3 で割ると 1 余る自然数の集合 S は $S = \{3n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ と表すことができる. したがって, $f(n) = 3n - 2$ で定める写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ は全単射である.
- (3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{a\}$ を $f(n) = \begin{cases} a & (n = 1) \\ n - 1 & (n \geq 2) \end{cases}$ と定めれば, これは全単射である.