数学科教育法 レポート③ 解答

課題 3-1 $ax^2+bx+c=0$ の左辺を以下のように平方完成する；

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\iff a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \\ &\iff a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=0 \\ &\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 \end{aligned}$$

定数項を右辺に移項する；

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0 &\iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c=\frac{b^2-4ac}{4a} \\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

$b^2-4ac\geq 0$ のとき，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$ と書けるので，

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 \\ &\iff x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\iff x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\boldsymbol{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \end{aligned}$$

を得る．

課題 3-2 $y=x^4$ 上の点 (a,a^4) の o 時間後の点を $(a+op, a^4+oq)$ とおくと，これは $y=x^4$ 上の点だから

$$\begin{aligned} a^4+oq=(a+op)^4 &\iff a^4+oq=a^4+4a^3op+6a^2o^2p^2+4ao^3p^3+o^4p^4 \\ &\iff oq=4a^3op+6a^2o^2p^2+4ao^3p^3+o^4p^4 \\ &\iff q=4a^3p+6a^2op^2+4ao^2p^3+o^3p^4 \\ &\iff \frac{q}{p}=4a^3+6a^2op+4ao^2p^2+o^3p^3. \end{aligned}$$

右辺の o は無限に小さい値だから無視する（0 とする）と

$$\frac{q}{p}=4a^3$$

を得る．これが点 (a,a^4) における接線の傾きである．

（**2013.5.1** 担当：佐藤）

数学科教育法 レポート③ 解答

課題 3-3　$\alpha < \beta$ とする．

(1) ℓ の方程式は $y = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2 = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta$ であるから，

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_\alpha^\beta \left\{(\beta+\alpha)x - \alpha\beta - x^2\right\} dx = \left[\frac{\beta+\alpha}{2}x^2 - \alpha\beta x - \frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{\beta+\alpha}{2}(\beta^2-\alpha^2) - \alpha\beta(\beta-\alpha) - \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) \\ &= (\beta-\alpha)\left\{\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} - \alpha\beta - \frac{1}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}}.\end{aligned}$$

(2) $\mathcal{D}$ に内接する三角形の中で面積最大のものは，線分 AB を底辺とする三角形で高さが最大となるものだから，点 P における接線の傾きは ℓ の傾きと等しくなくてはならない．$P(\gamma, \gamma^2)$ とおくと，$(x^2)' = 2x$ より，$2\gamma = \alpha + \beta$．したがって，点 P の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\right)}$ である．

(3) 点 P を通り y 軸に平行な直線と線分 AB との交点を Q とする．線分 PQ の長さは

$$|PQ| = \left\{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2} - \alpha\beta\right\} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

である．線分 PQ を底辺とするときの $\triangle APQ$ の高さを h_1，$\triangle BPQ$ の高さを h_2 とすると，$h_1 + h_2 = \beta - \alpha$ である．S_2 は $\triangle APQ$ の面積と $\triangle BPQ$ の面積の和だから，

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2}|PQ|\,h_1 + \frac{1}{2}|PQ|\,h_2 \\ &= \frac{1}{2}|PQ|(h_1+h_2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}(\beta-\alpha) \\ &= \boldsymbol{\frac{(\beta-\alpha)^3}{8}}.\end{aligned}$$

(4) (1) と (3) の結果から，比 $\frac{S_1}{S_2}$ は点 A, B の座標に関係なく $\frac{4}{3}$ であることがわかる．

（2013.5.1 担当：佐藤）