

東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第2回

§1) 数学とはどのような学問か (2)

17世紀の数学

担当：佐藤 弘康

1.3) 中世以降の数学（代数学の発展）

アラビア数学：インドの数学が土台

- 記数法と計算法（0, 負の数）.
- 代数学（式の計算, 方程式の解法）が発展. ギリシア数学を越えた.
- アル・フワーリズミー（9世紀）は「アルゴリズム」の語源. “algebra” は彼の著書名が語源.

ルネッサンス期の数学（イタリア）：アラビアの代数が伝わり発展

- ピサのレオナルド（1170頃～）：アラビア数学をラテン語で集大成.
- カルダーノ（16世紀）：3次方程式の代数的解法.
（デル・フェロ, タルタリアも発見していた）
- フェラーリ（16世紀）：4次方程式の代数的解法.

1.4.1) 17 世紀の数学 (1) 関数の概念

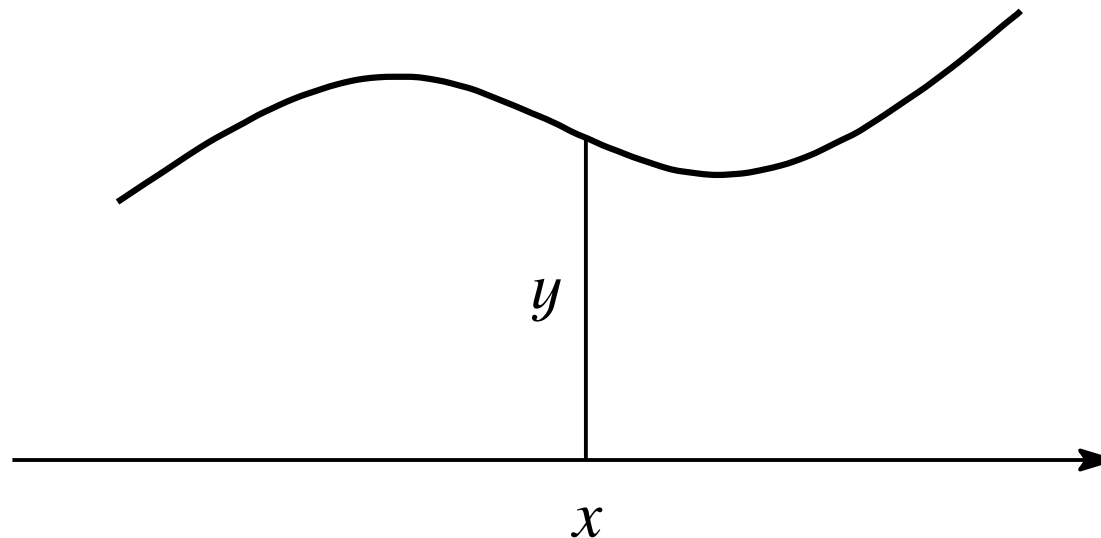
関数

- 2 つの変数があって、一方の変数の値が決まるともう一方の変数の値が決まるような対応関係のこと.
- 「変数 x の値に対し、もう一方の変数 y の値がただ一つ決まるとき、 y は x の関数である」という.
- 現代数学では定義域が (実) 数である写像のことを関数とよぶことが多い.
- x の関数は $f(x)$ と書き表されることが多い.
- f は function の頭文字.
- function とよんだのはライプニッツ.

1.4.2) 17 世紀の数学 (2) 解析幾何学

座標

- デカルト, 1637 年に『方法序説』を公表. 解析幾何の原理を説明.
(フェルマーも同様の概念にたどり着いていた)
- 図形を「代数方程式を満たす点の集合」と見る.
- 代数的な演算により図形の解析が可能に. 新たな図形の探求.

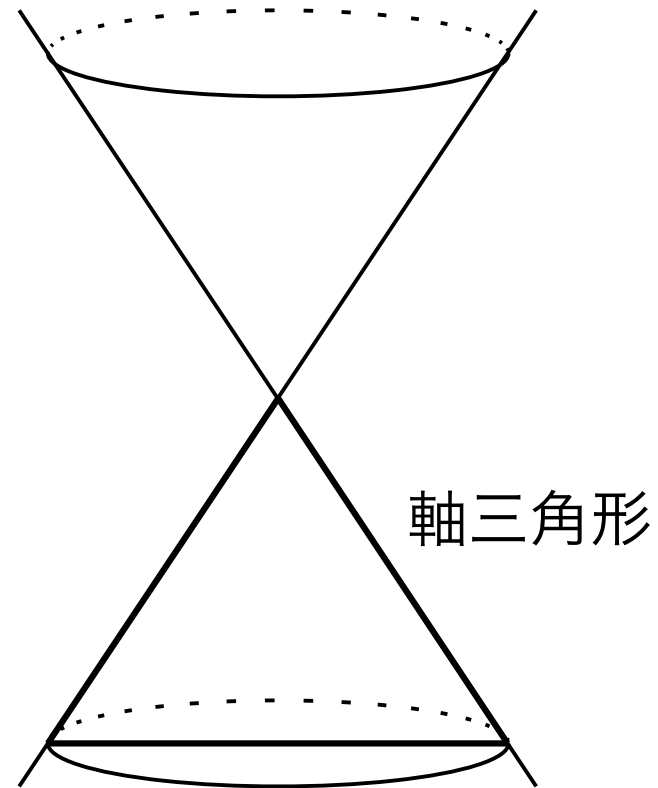
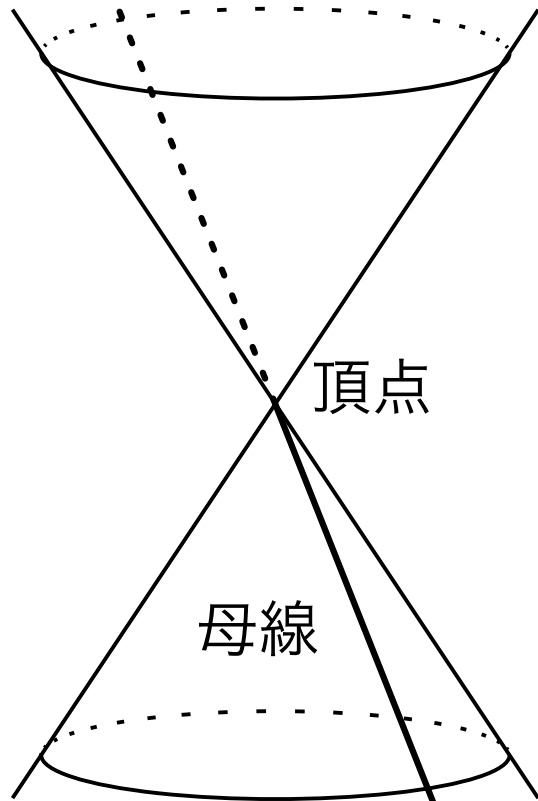


x が変化すると曲線までの“高さ” y も変化する.

1.4.2) 解析幾何学

例) アポロニウスの「円錐曲線論」(紀元前3世紀頃)

- 円錐をある平面で切断した切り口の曲線として 放物線, 楕円, 双曲線 を発見した.



1.4.2) 解析幾何学

放物線 母線に平行な平面で切断

ある直線 l と, l 上にない一点 F からの距離が等しい点 P の集合.

直線 l を $y = -a$, $F = (0, a)$, $P = (x, y)$ とすると $4ay = x^2$.

楕円 軸三角形の底辺以外の 2 辺と交点をもつように切断

2 点 A, B からの 距離の和が一定 である点 P の集合.

$A = (a, 0), B = (-a, 0)$, $AP + BP = 2c$, $P = (x, y)$ とすると $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

双曲線 軸三角形の斜辺を延長した直線上で交点をもつように切断

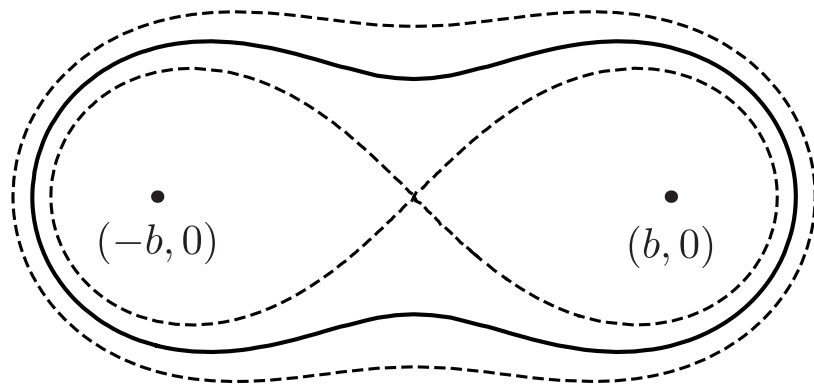
2 点 A, B からの 距離の差が一定 である点 P の集合.

$A = (a, 0), B = (-a, 0)$, $|AP - BP| = 2d$, $P = (x, y)$ とすると $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{a^2 - d^2} = 1$.

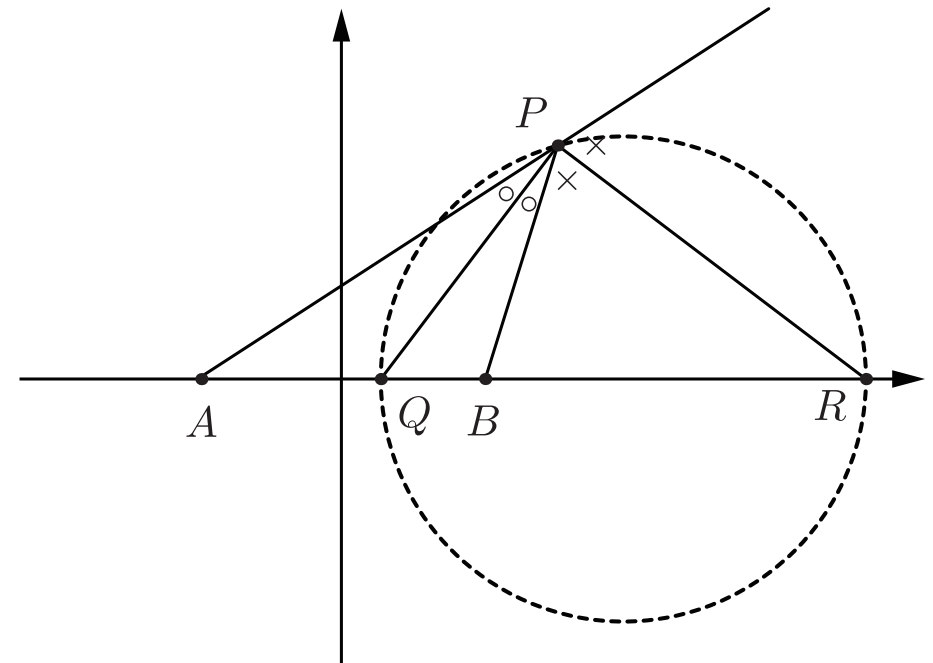
1.4.2) 解析幾何学

例2) 2点 A, B からの 距離の〇〇が一定である点 P の集合

- 和が一定：楕円
- 差が一定：双曲線
- 積が一定：カッシーニの卵形線
- 比が一定：アポロニウスの円



$$\sqrt{(x-b)^2 + y^2} \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = k$$



1.4.3) 17 世紀の数学 (3) 微分積分学

- ニュートンとライプニッツにより独立に創始された。
 - 実際にはニュートンが創始者とされている。
 - 現在の表記法 ($\frac{d}{dx}$, $\int f(x) dx$ など) はライプニッツが考案したものの。

微分法 曲線の接線 (運動する物体の瞬間の進行方向) を求める方法。

積分法 図形の面積を求める方法。

微分積分学の基本定理

微分と積分は逆の関係である；

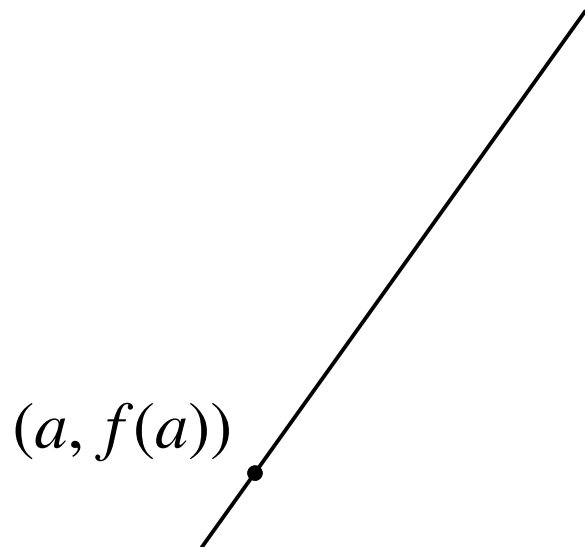
$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$$

1.4.3.1) 微分法 (流率法)

ニュートンの流率法 : 曲線の接線の傾きを計算する方法.

- 曲線を運動する点の軌跡と考える.
- 曲線を拡大すると直線と見なせる (無限に小さい時間の変化に着目).

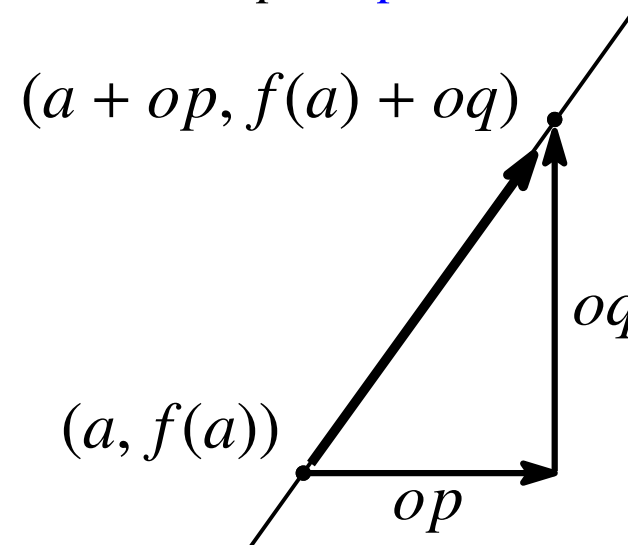
点 $(a, f(a))$ の付近を拡大



o 時間経つと ... →

“ o ” は「オミクロン」と読む

$$\text{傾きは } \frac{oq}{op} = \frac{q}{p}$$



$(a + op, f(a) + oq)$ も曲線上の点だから $f(a) + oq = f(a + op)$ を満たす.

1.4.3.1) 微分法 (流率法)

例) $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の傾きを求める.

$$y = x^2$$

$$(a^2 + oq) = (a + op)^2 \quad : (a + op, a^2 + oq) \text{ は } y = x^2 \text{ 上にある.}$$

$$a^2 + oq = a^2 + 2aop + o^2 p^2 \quad : \text{上式右辺を展開.}$$

$$oq = 2aop + o^2 p^2 \quad : \text{両辺の } a^2 \text{ を消去.}$$

$$q = 2ap + op^2 \quad : \text{両辺を } o \text{ で割る.}$$

$$\frac{q}{p} = 2a + op \quad : \text{両辺を } p \text{ で割る.}$$

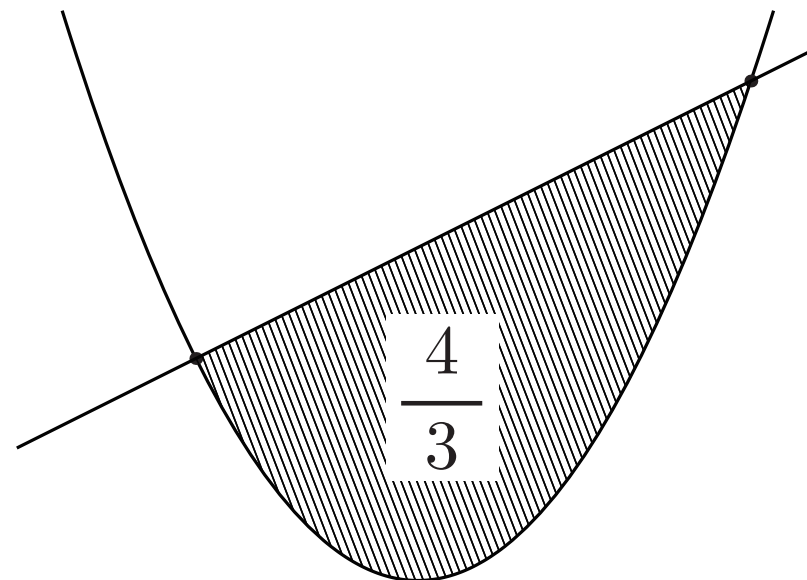
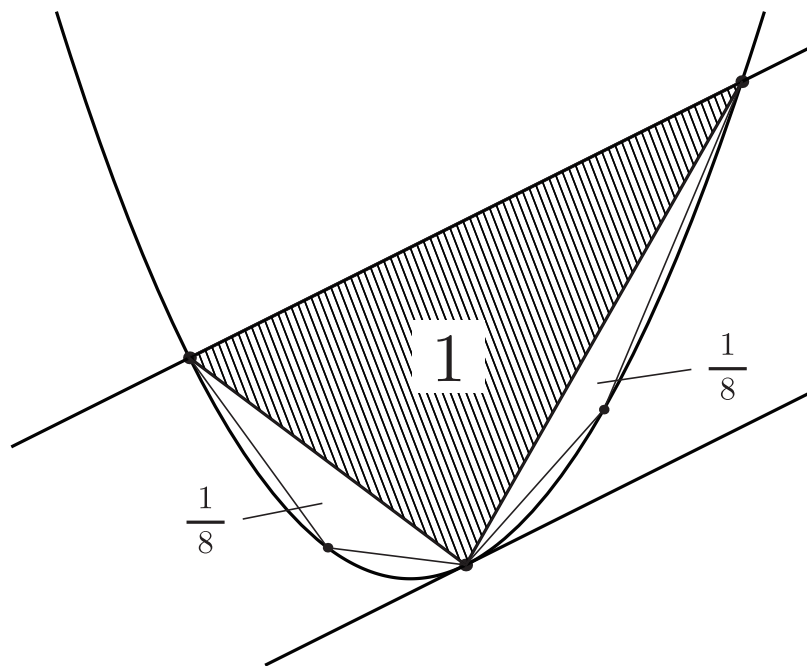
$$\therefore \frac{q}{p} = 2a \quad : o \text{ は無限に小さい数だから } \underline{\text{無視する.}}$$

1.4.3.2) 求積法の発展

取り尽くし法：図形を多角形で近似。級数（の無限和）の極限を計算。

例) アルキメデス（紀元前 3 世紀）

直線と放物線に囲まれた部分の面積は、その直線の線分を底辺として放物線に内接して高さが最大の三角形の面積の $\frac{4}{3}$ である



1.4.3.2) 求積法の発展

ケプラー (16~17 世紀)

- ケプラーの第 2 法則

「太陽と惑星を結ぶ直線が一定時間に描く領域の面積は一定」

アルキメデスのように小さな三角形に分けて足し合わせることで計算.

- ワイン樽の体積

ワインの量を樽にさし入れた棒がぬれた長さから計算していたが, ケプラーはワイン樽を無限に薄い円板の集まりとみなして計算.

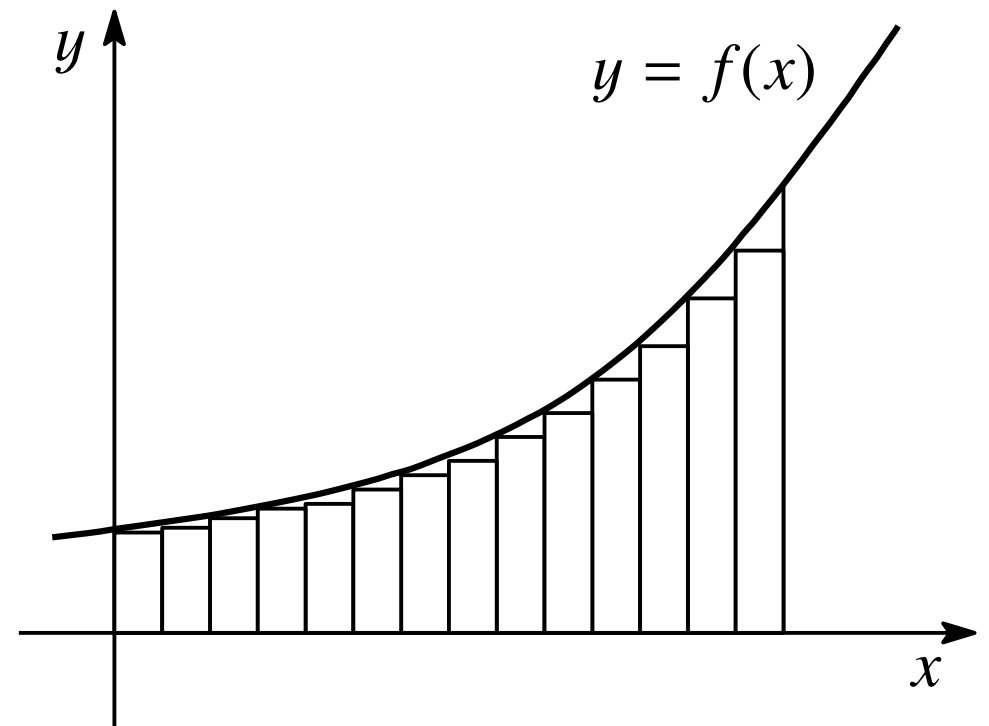
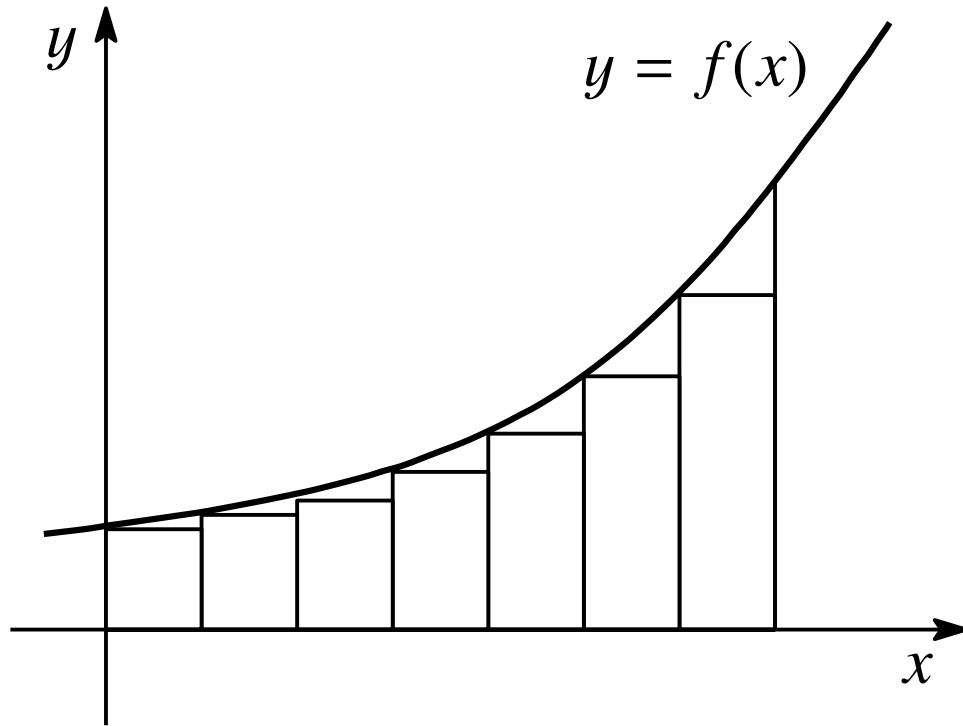
1.4.3.2) 求積法の発展

カヴァリエリ (17 世紀)

- 「面」は「線」が連なったもの. 「立体」は「面」が連なったもの.
- カヴァリエリの原理 (不可分の方法)
2 つの平面図形 A, B が平行な 2 直線に挟まれているとする. この 2 直線に平行な任意の直線に対し, A との交わりの部分の長さ a と B との交わりの部分の長さ b が等しいならば, A の面積と B の面積は等しい.

1.4.3.3) 積分法

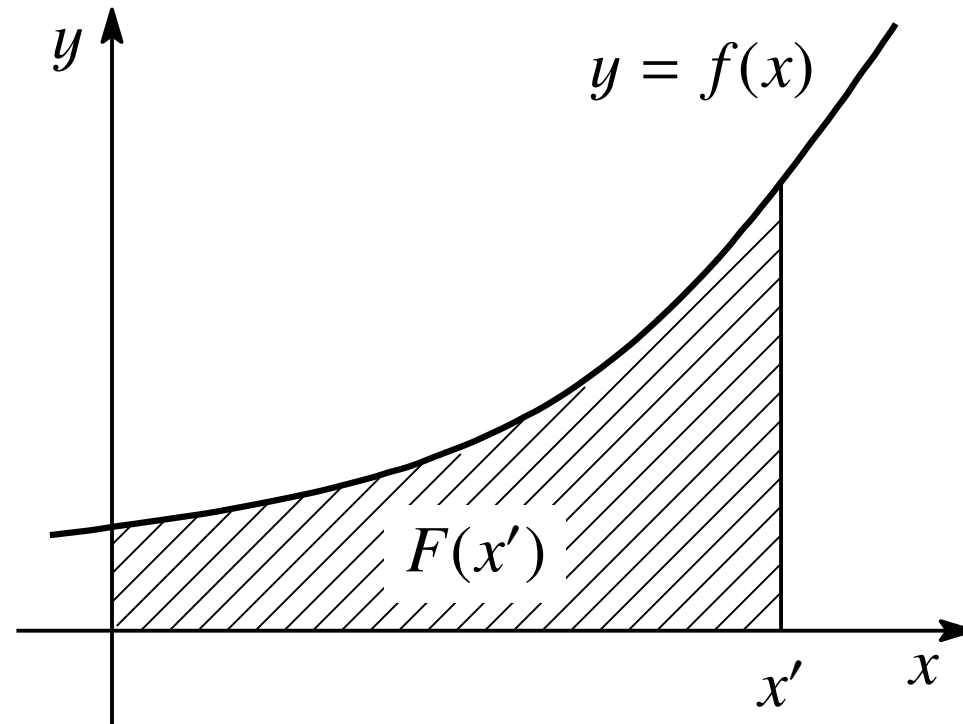
曲線 $y = f(x)$ と軸に囲まれた領域 D の面積 = 長方形（短冊）の面積の和.



短冊の横幅の長さを限りなく小さい値にすれば, その面積の和は D の面積に近づく.

1.4.3.3) 積分法

一方，領域の面積も x の関数とみることができる（ニュートンの「流量」）。



この関数 $F(x)$ の微分が $f(x)$ に等しい（微分積分法の基本定理）。

1.4.3.4) 微分積分学のその後

- ニュートンとライプニッツの争い「創始者はだれだ」
- バークリ：微積分（無限小解析）の基礎は厳密性に欠けると批判
「この流率とはなんだ？消えゆく増分の速度？その消えゆく増分とは何だ？有限の量でもなく，無限小の量でもなく，ましてや無でもない．今は亡き量の亡霊とでも呼ぼうか？」
- マクローリン：バークリに反論「証明を簡略化するため」
- ヤコブ，ヨハンのベルヌーイ兄弟：ライプニッツ流の微積分を広める．
- オイラー：関数の概念を明確に規定
- ラグランジュ：代数的操作で微積分（関数の級数展開）
- コーシー（19世紀）
極限の概念を厳密に定義し（ ϵ - δ 論法），微分積分の曖昧さを解消することに成功した．

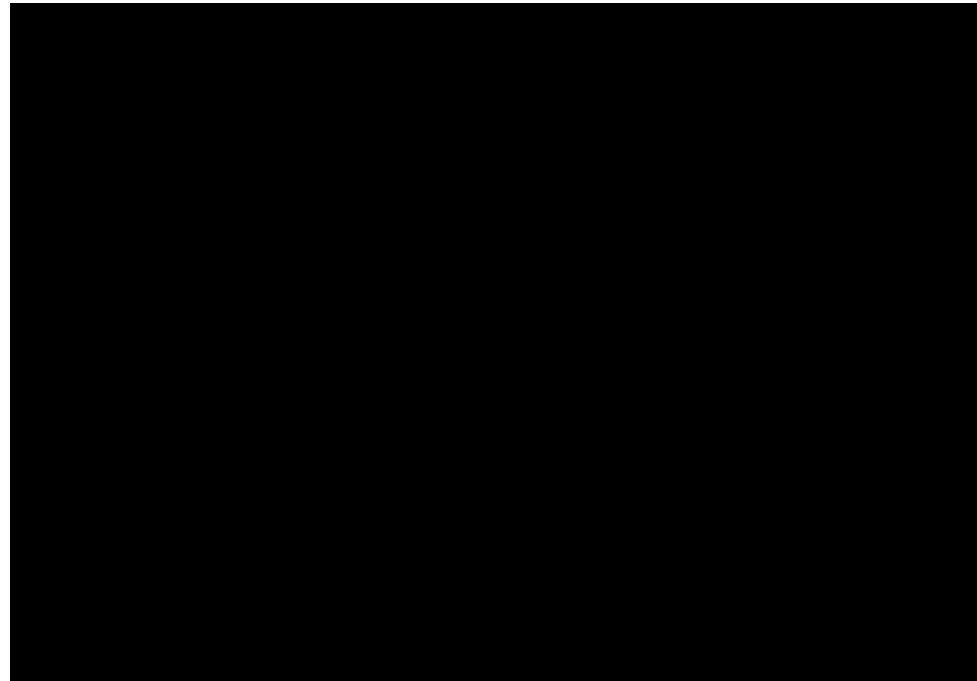
1.5) 和算：日本の数学

- 17 世紀以降，江戸時代に発展した（中国の数学から影響）。
- 吉田光由，1627 年（寛永 4 年）『塵劫記』
 - 計算方法，そろばん，面積の求め方など実用数学を網羅。
 - 問題がどんどん追加され，数百種類の版が出版された。
 - 数学の入門書としてベストセラー，ロングセラー。
- 関孝和（? – 1708）
 - 塵劫記を独学。
 - 中国の代数方程式の理論を発展させ，筆算式の記号法を考案。
 - 世界で最初に行列式概念を提案。
 - 円周率を小数第 12 位まで計算し，近似分数 $\frac{355}{113}$ を得た。
 - \vdots

非常に高度な数学が発展していた。

1.5) 和算：日本の数学

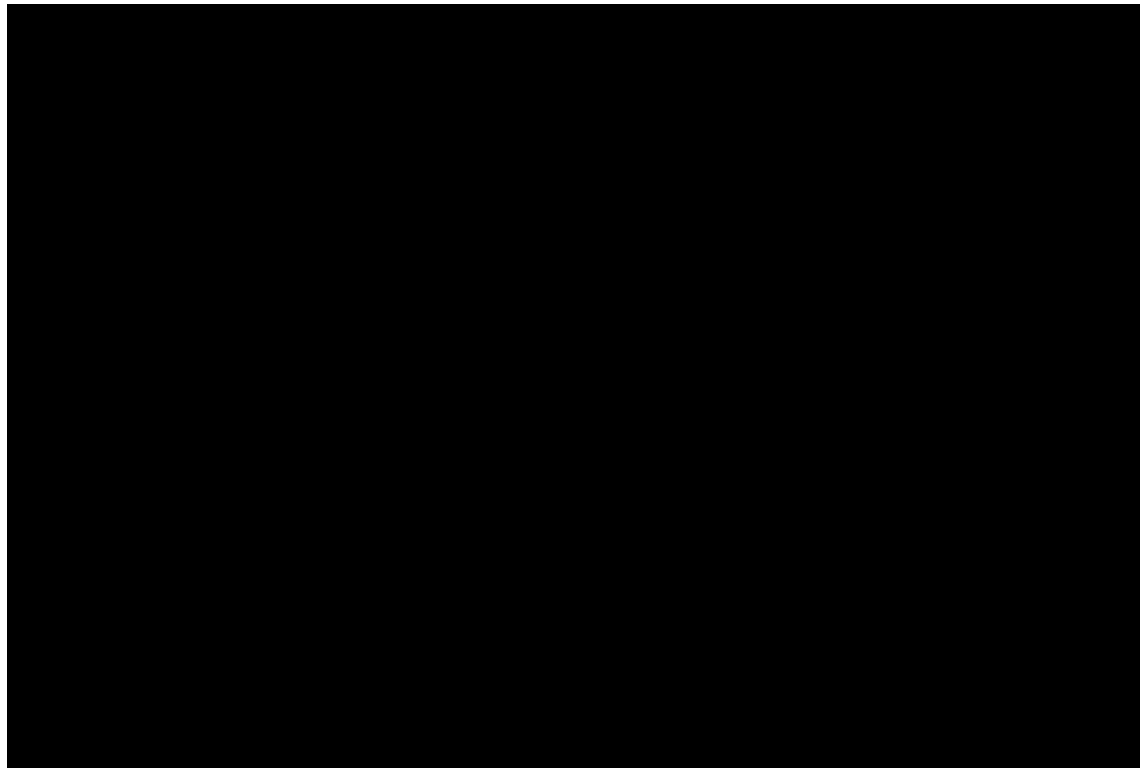
- 「算額」
 - 額や絵馬に数学の問題や解法を記して，神社や仏閣に奉納すした。
 - 多くの一般の市民（数学愛好家）も奉納。



「算法少女 1」（秋月 めぐる 著，原作 遠藤 寛子）より

1.5) 和算がでてくる作品

- 「天地明察」 沖方丁 著（角川書店）
- 「算法少女」 遠藤寛子 著（筑摩書房, ちくま学芸文庫）
- 「算法少女 1」 秋月めぐる 著・遠藤寛子 原作（SP コミックス, リイド社）
- 「和算に恋した少女 1」 脚本 中川 真・作画 風狸 けん（ビッグ コミックス, 小学館）



参考文献

- 「無限のパラドクス」 足立恒雄 著（講談社, ブルーバックス）
- 「これならわかる ニュートンの大発見 微分と積分」 （Newton 別冊）
- 「カッツ 数学の歴史」 ヴィクター J. カッツ 著・上野 健爾 他 翻訳（共立出版）
- 「岩波数学辞典 第4版」 日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia : 取り尽くし法, ケプラー, 和算, 関孝和