東京電機大学 情報環境学部

数学科教育法 第 2 回

§1) 数学とはどのような学問か（1）

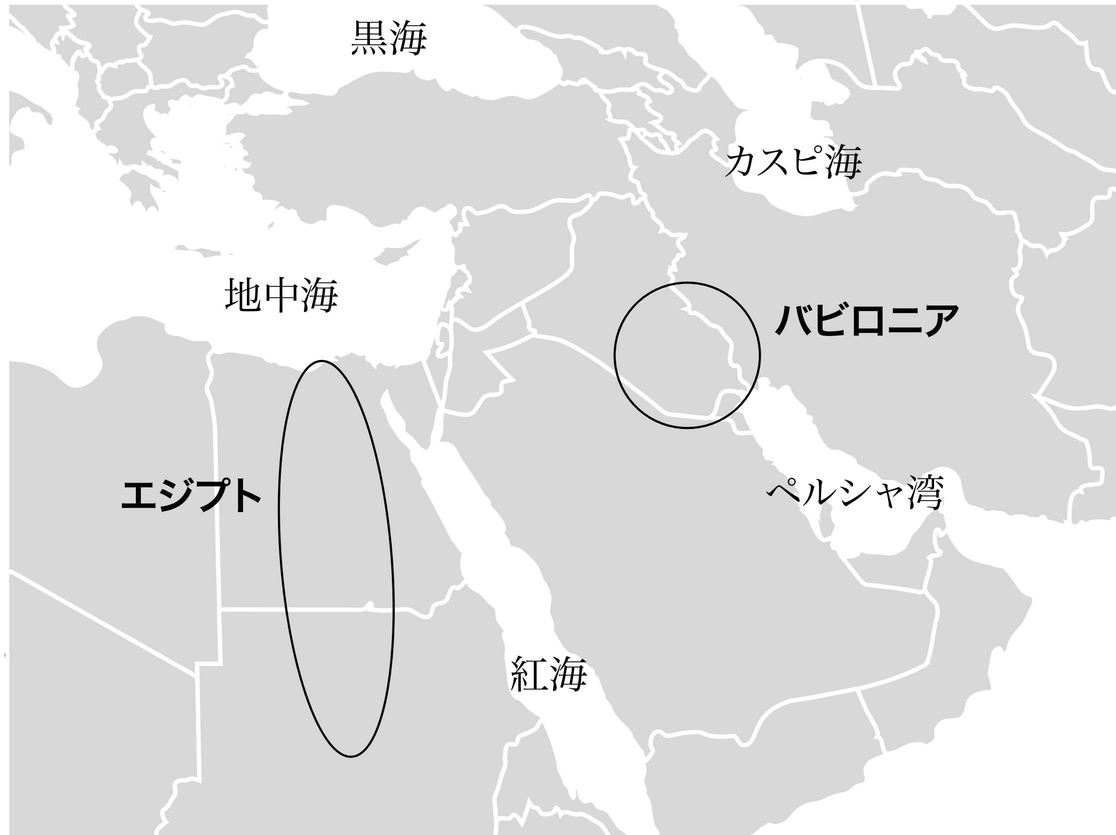
古代オリエントとギリシャの数学

担当：佐藤 弘康

1.1) 古代オリエントの数学

「古代オリエント」とは…

- 現在の中東地域に起こった文明
- およそ紀元前 4 千年紀から紀元前 4 世紀頃



1.1) 古代オリエントの数学

特徴

- 都市文明社会の経済的要請から生じたもの．実用的な計算．
- 日常の事象を数量的・空間的観点から観測して得られた経験的知識や帰納的推論により得られた事実．
- 数えること（表記法），算術計算（有理数の四則演算），1 次・2 次方程式の解法，初等幾何学，天文計算と暦計算，平方根など．

1.1) 古代オリエントの数学

$\boxed{\text{数えること（表記法）}}$：グループ化

- エジプト
  - 位取りの原理のない 10 進法で自然数（0 がない）.
  - 分数は $\dfrac{2}{3}$ と単位分数 $\dfrac{1}{n}$ だけ.
- バビロニア
  - 10 進法と 60 進法で自然数と小数を表した.
  - 例えば，$1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3}$ は "1; 24, 51, 10".
    （これは $\sqrt{2}$ の近似値 $1.41421296\cdots$）
  - なぜ「60」なのか？（60 は約数がたくさんあるから？）

1.1) 古代オリエントの数学

$\boxed{\text{算術計算}}$：アルゴリズム的（古代エジプト数学の方法を紹介）

- かけ算　　例）$12 \times 13 = \boxed{156}$

$$
\begin{array}{cll}
* & 1 & 12 \\
 & 2 & 24 \\
* & 4 & 48 \\
* & 8 & 96
\end{array}
$$

$$12 + 48 + 96 = \underline{156}$$

事実

任意の自然数は 2 の累乗の和で表すことができる.

1.1) 古代オリエントの数学

- わり算　　例１）$156 \div 12 = \boxed{13}$

12 を何個足すと 156 になるか？

1	12	*
2	24	
4	48	*
8	96	*

$$1 + 4 + 8 = \underline{13}$$

1.1) 古代オリエントの数学

- わり算　　例2）$2 \div 7 = \boxed{?}$

整数と単位分数 $\dfrac{1}{n}$ および $\dfrac{2}{3}$ の和で表す（それぞれ $\bar{n}$,　$\bar{\bar{3}}$ と書く）.

7 を "何個" 足すと 2 になるか？

$$\begin{array}{llll}
1 & 7 & & \\
\bar{2} & 3 & \bar{2} & \\
\bar{4} & 1 & \bar{2}\ \bar{4} & * \\
\bar{7} & 1 & & \\
\overline{14} & \bar{2} & & \\
\overline{28} & \bar{4} & & *
\end{array}$$

答えは $\underline{\bar{4} + \overline{28}}$ $\left(= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \right)$

1.1) 古代オリエントの数学

- わり算　　　例３）$80 \div 3\,\bar{2}\ (= 80 \div \frac{7}{2}) = \boxed{?}$

$3\,\bar{2}$ を “何個” 足すと 80 になるか？

1	$3\,\bar{2}$	
10	35	
20	70	*
2	7	*
$\bar{\bar{3}}$	$2\,\bar{3}$	*
$\bar{7}$	$\bar{2}$	*
$\overline{21}$	$\bar{6}$	*

答えは $\underline{22 + \bar{\bar{3}} + \bar{7} + \overline{21}}$　$\left(= 22 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} \right)$

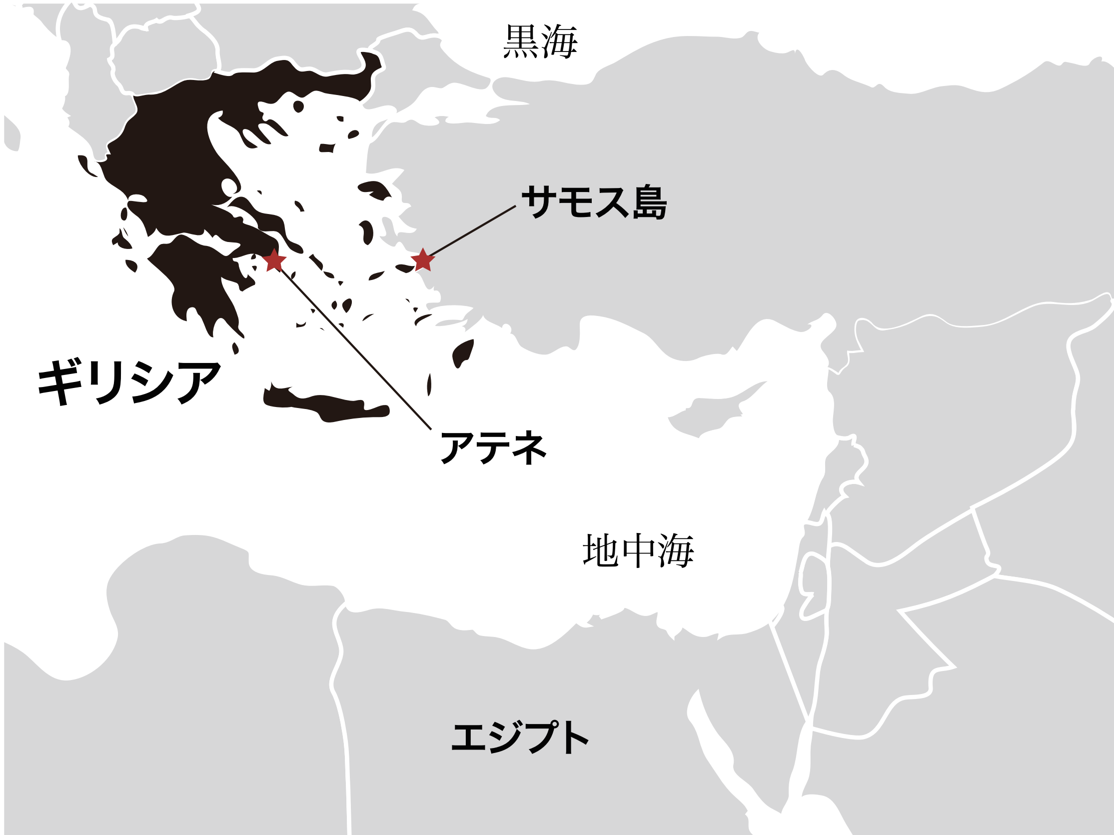
1.1) 古代オリエントの数学

初等幾何学

- 測量のための技術．作図の方法（平行や垂線など）．
- ピタゴラスの定理（$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数 (a, b, c) の組）
- 等間隔に 12 個の結び目をつけた縄の輪で直角や 60 度をつくる．
- 円の面積：$\left(d - \dfrac{d}{9}\right)^2$ （d は直径），"円周の長さの平方の $\dfrac{1}{12}$" など．
- 円周率の近似値として $\dfrac{25}{8}$ や $\dfrac{22}{7}$ など．
- 正 4 角錐台の体積（a, b は上底，下底の長さ，h は高さ）
  $\left\{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\right\}$
- 角錐の体積は同底同高の角柱の $\dfrac{1}{3}$．

1.2) ギリシアの数学

- 紀元前 6 世紀にギリシアで発生した論証数学.
- エジプトやバビロニアの数学から影響を受け発展.



1.2) ギリシアの数学

特徴

- 算術（数の本性），幾何学，天文学，音律学など．
- 仮定・既知の命題から新しい結論を論理的・演繹的に得る．
- なぜ，論理的思考 が持ち込まれたのか？
  - ギリシアの社会的・民族的背景
  - 民主制社会（議論と説得が重要な意味を持った）
  - どんな意見でも議論に勝ちさえすればよし．弁論競技．

プラトン　『幾何や算術では，それぞれの研究に応じていくつかの前提（仮設）を置き，これらは既知のものとみなし，あたかも万人に明らかであるかのように取り扱う』

1.2) ギリシアの数学

ターレス

- 記録に残っている最古の哲学者．ギリシアの七賢人．
- ピラミッドの高さを計測（図形の相似を利用）
- ターレスの定理：「半円内の角は直角である」など．

ピタゴラス — ピタゴラス学派（教団）

- 三平方の定理，無理数の発見．
- 奇数，偶数，素数，約数，倍数，完全数，三角数などの言葉．
- ピタゴラス音階．
- 「正多面体は 5 個しかない」など．

1.2) ギリシアの数学

ツェノン（ゼノン）の 4 つの逆理

(1)「二分法」

運動するものが A 地点から B 地点を目指すとき，中点の C 地点を通る．また A と C の間にも中点がある．この議論を続ければ，B 地点にたどり着くまでには無限の点を通る．無限の点を通るには無限の時間がかかり，結局 B にたどり着くことはできない．

(2)「アキレスと亀」

(3)「飛んでいる矢は止っている」

(4)「競技場」

当時の考えの範囲を超えていた (無限，時間，運動，変化，分割，連続とは？)

1.2) ギリシアの数学

エウクレイデス（ユークリッド）の『原論』

- ギリシア数学の集大成．全 13 巻．
- 既存の知識を ごく少数の基本的知識 を論拠にして論理的・演繹的に導き，系列化．
  - 23 の定義：点，直線，面，鋭角，鈍角，円，正方形，平行線など．
  - 5 つの公準（要請）：
    例えば「任意の点から任意の点への直線をひくこと」など．
  - 9 つの公理（共通概念）：
    例えば「同じ物に等しいものはまた互いに等しい」など．

1.2) ギリシアの数学

エウクレイデス（ユークリッド）の『原論』

- 第 1 巻・命題 1：

  「与えられた線分を 1 辺とするような正三角形をつくることができる」

- 第 1 巻・命題 47：ピタゴラスの定理（三平方の定理）

  「直角三角形において直角に対する辺上の正方形は直角をはさむ 2 辺の上の正方形の和に等しい」

- 第 3 巻・命題 31：ターレスの定理

  「直径に対する円周角は直角である」

参考文献

- 「無限のパラドクス」足立恒雄 著（講談社，ブルーバックス）
- 「マンガ おはなし数学史」佐々木ケン 原作・仲田紀夫 漫画（講談社，ブルーバックス）
- 「数学が歩いてきた道」志賀浩二 著（PHP 研究所，PHP サイエンス・ワールド新書）
- 「ユークリッド原論」中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵 訳・解説（共立出版）
- 「カッツ 数学の歴史」ヴィクター J. カッツ 著・上野 健爾 他 翻訳（共立出版）
- 「岩波数学辞典 第４版」日本数学会 編集（岩波書店）
- Wikipedia「数学史」http://ja.wikipedia.org/wiki/数学史