線形代数 第 4 回小テスト 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ 対角行列は対称行列であり，（上および下）三角行列でもあることに注意せよ．零行列は対称行列であり交代行列でもある唯一の行列である．正しいものを選んでいればひとつにつき 1 点，正しくないものを選んでいる場合はひとつにつき 1 点減点．

(i) アイケ　(ii) アイオケ　(iii) アイクケコ　(iv) イシ

$\boxed{\mathbf{2}}$ 任意の正方行列 A に対し，$(A + {}^tA)$ は対称行列となり，$(A - {}^tA)$ は交代行列になる．また，任意の行列 B（正方行列でなくてもよい）に対し，$B \cdot {}^tB$ および ${}^tB \cdot B$ も対称行列である（いずれも転置行列の性質 (a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$，(b) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$，(c) ${}^t({}^tA) = A$ を用いて証明される）．

(i) $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$　(ii) $A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 13 & 14 \\ -3 & 14 & 18 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

したがって，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ （$x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ と書いてもよい）．

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & -2 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

したがって，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ （$x = 11,\ y = 7,\ z = 6$ と書いてもよい）．

2013.5.17 担当：佐藤