

線形代数 第3回小テスト 解答

1

$$(1) \text{ (i) } AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ (ii) } BA = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 9 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ (i) } AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \text{ (ii) } BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{ (i) 計算不可能, (ii) } BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に対し, $2 \times (-\frac{1}{2}) - (-1) \times 1 = 0$ より, A の逆行列は存在しない.

3 連立1次方程式 (*) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{2 \times (-2) - 3 \times 1} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$(3) X = A^{-1}P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって(*)の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である ($x = 1, y = 1$ と書いてもよい).

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, $AB = O$ を満たす零行列以外の行列 B は存在しない.

(理由) 仮に $AB = O$ を満たす行列 B が存在したとする. 行列 A は $2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5 \neq 0$ を満たすので, 逆行列 A^{-1} が存在する. $AB = O$ の両辺に左から A^{-1} をかけると, 右辺は零行列 O となるが, 左辺は $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$ となるので, B は零行列でなくてはならない. したがって, 上記の行列 A に対して $AB = O$ を満たす零行列以外の行列 B は存在しない.