固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し，

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p}$$

を満たす数 λ を $\boldsymbol{A}$ の固有値，$\vec{p}\,(\neq \vec{0})$ を固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ に対応する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとよぶ．

- 固有ベクトルは連立方程式 $(\lambda E_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の $\vec{0}$ でない解（非自明解）である．
- 固有値は $\det(\lambda E_n - A) = 0$ を満たす数である．

固有値，固有ベクトルの求め方

(1) 固有多項式 $f_A(t) = \det(tE_n - A)$ を計算する．
(2) $f_A(t) = 0$ の解 $t = \lambda$ を求める（この解 $\underline{\lambda \text{ が } A \text{ の固有値}}$ である）．
(3) (2) で求めた各 λ に対し，連立方程式 $(\lambda E_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{x} = \vec{p}$ を求める（この解 $\underline{\vec{p} \text{ が } A \text{ の固有値 } \lambda \text{ に対応する固有ベクトル}}$ である）．

$\boxed{\text{例題}}$ 行列の $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) 固有多項式 $f_A(t) = \det(t\,E_3 - A)$ を求めなさい．
(2) 3 次方程式 $f_A(t) = 0$ の解 λ を求めなさい．
(3) (2) で求めた各 λ に対し，連立方程式 $(\lambda E_3 - A)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{p}_\lambda$ を求めなさい．
(4) (2) で求めた各 λ に対し，$A\vec{p}_\lambda = \lambda\vec{p}_\lambda$ が成り立つことを確かめなさい．

(2013.7.12)

$\boxed{\text{問題}}$ 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2013.7.12)