線形代数 期末試験 解答

（**2013.7.19** 担当：佐藤）

注意．満点は 40 点だが，以下のように最大 4 点（各 1 点）が可算される場合がある．

(1) $\boxed{\mathbf{1}}$ (2)：行列の括弧の前に行列式を表す det がきちんと書かれてあり（または行列の丸括弧が線分で記されている），かつすべてが等号で結ばれている．

(2) $\boxed{\mathbf{2}}$ (1)(2) および $\boxed{\mathbf{3}}$ (1)：各行列が行列の基本変形であることを示す矢印 ($\longrightarrow$) ですべて結ばれている（各 1 点）．

部分点については以下の解説の中で述べる．

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{-3}$

(2) $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{22}$

（部分点） (2) で行列式の性質を使って（または余因子展開を）数回正しく式変形できていれば **2** 点（ただし，注意の (1) が満たされている必要がある．したがって，それと合わせて 3 点となる）．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 拡大係数行列を行基本変形により簡約階段行列に変形する．

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 26 & -4 \\ 0 & 1 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$．

したがって，解は $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}}$ （ただし，k は任意の実数）．(3 点)

解の自由度は (未知数の数) − (拡大係数行列の階数) だから，$\underline{1}$．(2 点)

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$．一方，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから

$\mathrm{rank}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) = 3 > 2 = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$．したがって，この連立方程式の解は存在しない．

（部分点と減点） 拡大係数行列を書いていれば **1** 点．行基本変形が数回正しくできていれば，さらに **1** 点（ただし，途中で列基本変形をしている場合は加点しない）．(2) において，「解が存在しない」ことの説明が不正確な場合は **1**〜**2** 点減点する．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$.

したがって，$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}}$.

(2) 逆行列を求める場合は行に関する基本変形を用いる．よって，基本変形する際は基本行列を<u>左からかける</u>（具体的な基本行列の形は教科書を参照．ここでは省略）．

（部分点） E_3 を付け加えた 3×6 行列を書いていれば **1** 点．行基本変形が数回正しくできていれば，さらに **1** 点．余因子行列を用いて逆行列を求める方法を使っていても正しければ 4 点加点する（解が正しくなくても，余因子行列の性質を理解していると判断した場合は **2** 点部分点）．

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $\det(tE_2 - A) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix} = t^2 + t - 6 = (t-3)(t+2)$ より，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ の <u>固有値は 2，-3</u>．（**2** 点）

$(2E_2 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有値は 2 に対応する固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$．（**2** 点）

$((-3)E_2 - A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，固有値は -3 に対応する固有ベクトルは $\underline{c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$．（**2** 点）

(2) 仮定から

$$B\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\vec{v} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 5\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

を満たす α（固有値）が存在する．上式の左辺を計算すると $\begin{pmatrix} 2 \\ 5k \\ -4 \end{pmatrix}$ であるから，これが $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 5\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ と等しくなるためには $\underline{\alpha = -2}$ でなければならない（これが $\vec{v}$ に対応する行列 B の固有値）．（**2** 点）したがって，第 2 成分を比較すると $5k = 5\alpha = -10$ であるから $\underline{k = -2}$ である．（**2** 点）