線形代数 中間試験 解答

$\boxed{\mathbf{1}}$ 正しくないものを選んだ場合はひとつにつき 2 点減点.

(1) $\vec{a}$ との内積が 0 のベクトルは（ウ）
(2) ${}^tA = -A$ を満たすのは（エ）
(3) 行列式の値が 0 でないのは（ウ）
(4) （ア）

$\boxed{\mathbf{2}}$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (2) のみ，解が正しくなくても基本変形が数回正しくできていれば 1 点.

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \underline{\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(2)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \underline{\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times (-2) = \underline{4}$.　(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 2 \times 1 = \underline{2}$ [*1].

(3)
$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = 2 \times \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(1 + 8 - 4 - (-2)) = \underline{14}$$ [*2].

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $Be_1 = e_4$，$Be_2 = e_1$，$Be_3 = e_3$，$Be_4 = e_2$ より，$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. その置換行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(3) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) 置換 φ の置換行列を A_φ と表すと，$A_\varphi e_i = e_{\varphi(i)}$ である．すると，$A_\varphi A_\psi e_i = A_\varphi e_{\psi(i)} = e_{\varphi(\psi(i))} = e_{\varphi\psi(i)}$ より $A_\varphi A_\psi = A_{\varphi\psi}$ が成り立つ．このことから，A_φ の逆行列は $A_{\varphi^{-1}}$ である（なぜなら，$A_\varphi A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi\varphi^{-1}} = A_{1_N} = E$ だから）．したがって，A_φ^{-1} の求め方は φ の逆置換を求め，その置換行列を求めればよい[*3]（根拠の説明が足りなかったり，文章がおかしい場合は 1 点のみ.）.

[*1] 三角行列の行列式は対角成分の積に等しい.
[*2] 補助定理 4.1（教科書 p.70）を利用する.
[*3] 実際には $A_\varphi^{-1} = {}^tA_\varphi$ である．また，$\det(A_\varphi) = \mathrm{sgn}(\varphi)$ が成り立つ（行列式の性質から）.

実施日 **2013.6.7** 担当：佐藤