1 投影（射影）

問題 1.1. p.12 を参照せよ．

問題 1.2. 一般に，透視投影によって直線は直線に移る（*Mathematica* で実験してみればよい）．しかし，視点を通る直線は投影面上の 1 点に移る（つまり，$\vec{p}=\vec{v}+t\vec{w}$ に対し，$\Phi_V(\vec{p})$ はパラメーター t に依存しない点となる）．

問題 1.3. (1.10) 式の $\vec{u}$ を $\vec{n}$ とすればよい． $\Psi_{\vec{n}}(\vec{p})=\vec{p}+\left(\dfrac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\vec{n}.$

問題 1.4. xy-平面の方程式は $z=0$ なので，問題 1.3 の解の式において $\vec{n}=(0,0,1)$，$d=0$ とすればよい．

$$\Psi_{\vec{n}}(\vec{p})=\vec{p}-(\vec{p}\cdot\vec{n})\vec{n}=(p_1,p_2,p_3)-p_1(1,0,0)=\underline{(0,p_2,p_3)}.$$

問題 1.5. $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ に対し，$\Psi_{\vec{u}}(\vec{p})$ を計算すると，t に依存しない 点 となることがわかる．

問題 1.6. $V(t)=\vec{v}+t\vec{u}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\Phi_{V(t)}(\vec{p}) &= \vec{p}+\left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{((\vec{v}+t\vec{u})-\vec{p})\cdot\vec{n}}\right)((\vec{v}+t\vec{u})-\vec{p})\\
&= \vec{p}+\left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{((\vec{v}-\vec{p})+t\vec{u})\cdot\vec{n}}\right)((\vec{v}-\vec{p})+t\vec{u})\\
&= \vec{p}+\left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{(\vec{v}-\vec{p})\cdot\vec{n}+t\vec{u}\cdot\vec{n}}\right)((\vec{v}-\vec{p})+t\vec{u})\\
&= \vec{p}+\left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{\frac{1}{t}(\vec{v}-\vec{p})\cdot\vec{n}+\vec{u}\cdot\vec{n}}\right)\left(\frac{1}{t}(\vec{v}-\vec{p})+\vec{u}\right)
\end{aligned}$$

となる．厳密な議論は避け，直感的に極限を解釈する．上の式において $t\to\infty$ とすると，$\frac{1}{t}(\vec{v}-\vec{p})$ は $\vec{0}$ ベクトルに収束するので，

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_{V(t)}(\vec{p})=\vec{p}+\left(\frac{d-\vec{p}\cdot\vec{n}}{\vec{u}\cdot\vec{n}}\right)\vec{u}=\Psi_{\vec{u}}(\vec{p}).$$

2 同次座標系

問題 2.1.

$$(1)\quad \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u}+\vec{v} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & -\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 2.2.

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & MN & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M^{-1} & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 2.3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} & E_3 & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M & & M\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 2.4.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M^{-1} & & -M^{-1}\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3 透視投影の同次座標系による表現（標準的な場合）

問題 3.1. (1) $\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$

問題 3.3. 視点 V の同次座標を $(20:6:1:2)$ とすると，平面 $x=0$ への透視投影は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 20 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 20 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

の積として表される．6 点 A,B,C,D,E,F の同次座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とすると，Φ_V による投影像の同次座標は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 59 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ 61 \\ 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -14 \\ 61 \\ 22 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -26 \\ 59 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 180 \\ 40 \end{bmatrix}$$

となる．これを直交座標に変換すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{9} \\ \frac{59}{18} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{11} \\ \frac{61}{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{11} \\ \frac{61}{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{13}{9} \\ \frac{59}{18} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

したがって，ワイヤーフレームは以下の図 3.3 のようになる．

4 一般の平面への透視投影

問題 4.1. 直交行列とは ${}^t\!A\,A = A\,{}^t\!A = E_n$ を満たす行列 A のことである．行列を

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

とベクトルが並んだものを見ると，A が直交行列であることは「任意の i,j について，$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ が成り立つ」ことと同値である（つまり，すべての列ベクトルが互いに直交する単位ベクトルである）．

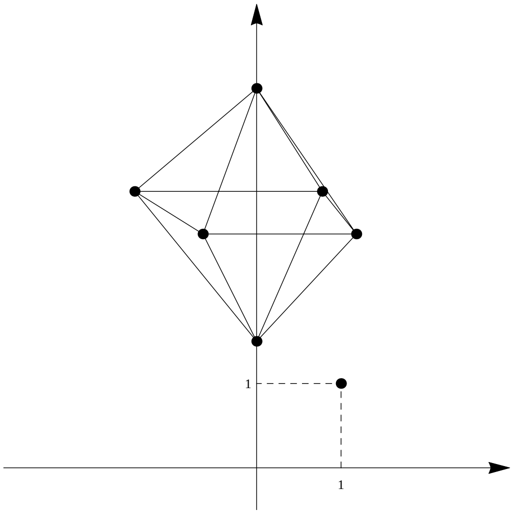

図 1　問題 3.2 のワイヤーフレーム

3 次の直交行列について考える．空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交し，長さは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形の面積の値に等しい」ベクトルである．もし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交する単位ベクトルならば，$\vec{a} \times \vec{b}$ も $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交するので，これらは互いに直交する．さらに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形は 1 辺の長さが 1 の正方形だから面積は 1 である．以上のことから，行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix}$ は直交行列であることがわかる．

問題 4.3. 平面 $3x - 4y + 5z = 6$ の法線ベクトルを $\vec{n} = (3, -4, 5)$ とおくと，この方程式は $\vec{n} \cdot \vec{x} = 6$ と書ける．$\vec{n}$ と直交するベクトルとして，$\vec{m} = (4, 3, 0)$ を選ぶと，$\vec{n} \times \vec{m} = (-15, 20, 25) = 5(-3, 4, 5)$．したがって，これらが単位ベクトルになるように正規化し，それを並べて

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

とする．また，$\vec{u}$ は $\vec{u} \cdot \vec{n} = 6$ を満たばよいので，例えば，$(2, 0, 0)$ とか $(0, 1, 2)$ など．

問題 4.5. 問題 3.4 の直交行列 M と $\vec{u} = (2, 0, 0)$ に対して，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \vec{u}$ と座標変換する．すると，投影面 π は $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系では方程式 $\bar{x} = 0$ となる．

視点 V の同次座標を $(8:-9:6:1)$ とし，これを $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系における同次座標で表すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)^{-1}\begin{bmatrix}8\\-9\\6\\1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} & M^{-1} & & -M^{-1}\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{bmatrix}8\\-9\\6\\1\end{bmatrix}$$
$$=\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tM & & -{}^tM\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{bmatrix}8\\-9\\6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{42\sqrt{2}}{5}\\-\frac{3}{5}\\-\frac{12\sqrt{2}}{5}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}42\sqrt{2}\\-3\\-12\sqrt{2}\\5\end{bmatrix}.$$

よって，$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-座標系における平面 $\bar{x}=0$ への透視投影を表す行列は

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&42\sqrt{2}&0&0\\12\sqrt{2}&0&42\sqrt{2}&0\\-5&0&0&42\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

である．

以上のことから，この透視投影 Φ_V を表す行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & M & & \vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&42\sqrt{2}&0&0\\12\sqrt{2}&0&42\sqrt{2}&0\\-5&0&0&42\sqrt{2}\end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} & {}^tM & & -{}^tM\vec{u} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$=\underline{\begin{pmatrix}30\sqrt{2}&16\sqrt{2}&-20\sqrt{2}&24\sqrt{2}\\\frac{27}{\sqrt{2}}&24\sqrt{2}&\frac{45}{\sqrt{2}}&-27\sqrt{2}\\-9\sqrt{2}&12\sqrt{2}&27\sqrt{2}&18\sqrt{2}\\-\frac{3}{\sqrt{2}}&2\sqrt{2}&-\frac{5}{\sqrt{2}}&45\sqrt{2}\end{pmatrix}}$$

である．

$P(3,2,-1)$ の同次座標を $(3;2:-1:1)$ とすると

$$\Phi_V(P)=\begin{pmatrix}30\sqrt{2}&16\sqrt{2}&-20\sqrt{2}&24\sqrt{2}\\\frac{27}{\sqrt{2}}&24\sqrt{2}&\frac{45}{\sqrt{2}}&-27\sqrt{2}\\-9\sqrt{2}&12\sqrt{2}&27\sqrt{2}&18\sqrt{2}\\-\frac{3}{\sqrt{2}}&2\sqrt{2}&-\frac{5}{\sqrt{2}}&45\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}166\sqrt{2}\\39\sqrt{2}\\-12\sqrt{2}\\47\sqrt{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{47}\begin{pmatrix}166\\39\\-12\end{pmatrix}$$

である．

実際，$\vec{v}=(8,-9,6)$，$\vec{n}=(3,-4,5)$，$d=6$ として，一般の透視投影の公式 (p.3) を用い

て投影像を求めると

$$\begin{aligned}
\Phi_V(P) =& \vec{p} + \left(\frac{d - \vec{p}\cdot\vec{n}}{(\vec{v}-\vec{p})\cdot\vec{n}}\right)(\vec{v}-\vec{p}) \\
=& (3,2,-1) + \left(\frac{6-(9-8-5)}{(5,-11,7)\cdot(3,-4,5)}\right)(5,-11,7) \\
=& (3,2,-1) + \frac{10}{15+44+35}(5,-11,7) \\
=& (3,2,-1) + \frac{5}{47}(5,-11,7) \\
=& \frac{1}{47}\left((141,94,-47)+(25,-55,35)\right) \\
=& \frac{1}{47}(166,39,-12)
\end{aligned}$$

である．

問題 **4.7.** （省略）