□ 双曲線を理解するための問題

問題 7.1 (双曲線の漸近線)**.** 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を $\mathcal{H}$，直線 $y = \dfrac{b}{a}x$ を l とする $(a, b > 0)$．第 1 象限における $\mathcal{H}$ 上の点 P に対し，点 P を通り l と直交する直線を l' とし，l と l' の交点を H とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 点 P の座標を (X, Y) とするとき，l' の方程式を求めなさい．

(2) 点 H の座標を a, b, X, Y を用いて表しなさい．

(3) $|PH| = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \dfrac{1}{|bX + aY|}$ となることを示しなさい．

問題 7.2 (双曲線の離心角)**.** [*1]双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を $\mathcal{H}$，円 $x^2 + y^2 = a^2$ を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{H}$ 上の点 P に対し，点 P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする．また，点 R を点 P と同じ象限にある $\mathcal{C}$ 上の点で，直線 QR が R における $\mathcal{C}$ の接線となるような点とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 点 P の座標を (X, Y) とする．Y を a, b, X を用いて表しなさい．ただし，P は第 1 象限の点とする（$X, Y > 0$）．

(2) 点 P の座標を (X, Y) のとき，Q の座標を答えなさい．

(3) 点 Q を通り，傾きが m の直線を l とする．l の方程式を求めなさい．

(4) l と $\mathcal{C}$ の交点の数がただ 1 つであるとき，m を a, X を用いて表しなさい．

(5) 点 R の座標を求めなさい．

(6) 点 R の座標を $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ とおくとき，X, Y を a, b, θ を用いて表しなさい．

[*1] 教科書 p.86 の図 4.4 を参照せよ．

□ **2** 次式の行列表示を理解するための問題

問題 7.3. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$ に対し，

$$\varphi(\vec{x}) = {}^t\vec{x}A\vec{x} + 2{}^t\vec{x}\vec{b} + c$$

とおく．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) ${}^t\vec{x}A\vec{x} = ax^2 + 2hxy + by^2$ となることを確かめなさい．

(2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ に対し，${}^t\vec{x}A\vec{v} = {}^t\vec{v}A\vec{x}$ であることを確かめなさい．

(3) $\varphi(\vec{X} + \vec{v}) = {}^t\vec{X}A\vec{X} + 2{}^t\vec{X}(A\vec{v} + \vec{b}) + {}^t\vec{v}A\vec{v} + 2{}^t\vec{v}\vec{b} + c$ となることを確かめなさい．

(4) $A\vec{v} + \vec{b} = \vec{0}$ かつ $\det(A) \neq 0$ （つまり，$\vec{v} = -A^{-1}\vec{b}$）のとき，

$$ {}^t\vec{v}A\vec{v} + 2{}^t\vec{v}\vec{b} + c = \frac{\det(A_0)}{\det(A)}$$

となることを確かめなさい．ただし，

$$A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} a & h & g \\ h & b & f \\ \hline g & f & c \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ {}^t\vec{b} & c \end{pmatrix}.$$

問題 7.4. 2 次多項式 $\varphi(x, y) = 3x^2 - 12xy - 6y^2 - 6x - 12y + 13$ について，以下の問の答えなさい．

(1) $\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6y^2 - 6x - 12y + 13$ と表すときの 2 次正方行列 A を書きなさい．

(2) $\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すときの 3 次正方行列 A_0 を書きなさい．

(3) $\det(A)$ および $\det(A_0)$ を求めなさい．

(4) 座標の平行移動 $x = \bar{x} + \lambda$, $y = \bar{y} + \mu$ によって，方程式 $\varphi(x, y) = 0$ を $a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + \bar{c} = 0$ と式変形できることを確かめ，そのときの λ, μ の値を求めなさい．

□ **2** 次曲線の分類に関する問題

問題 7.5. 次の 2 次方程式が有心 2 次曲線か無心 2 次曲線か考察しなさい.[*2]

(1) $x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$
(2) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$

問題 7.6 (問題 7.4 の続き). 2 次多項式 $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = 3\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{y} - 6\bar{y}^2 + 18$ について，以下の問の答えなさい.

(1) $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + 18$ と表すときの 2 次正方行列 $\bar{A}$ を書きなさい.
(2) $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix} \bar{A}_0 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix}$ と表すときの 3 次正方行列 $\bar{A}_0$ を書きなさい.
(3) $\det(\bar{A})$ および $\det(\bar{A}_0)$ を求めなさい.
(4) 行列 $\bar{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.
(5) 行列 $\bar{A}$ の固有ベクトル $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で，$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$ かつ $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$ を満たす組を 1 つ求めなさい.
(6) (5) で定めたベクトルを並べて 2 次正方行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ を作りなさい.
(7) (6) で定めた行列 P に対し，$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ と座標変換する．このとき，方程式 $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ を $\tilde{x}, \tilde{y}$ の方程式として表しなさい.

問題 7.7 (問題 7.5(1) の続き). 2 次方程式 $\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ が表す図形はどのような 2 次曲線か，問題 7.6 を参考にて考察しなさい.

問題 7.8 (問題 7.5(2) の続き). 2 次方程式 $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$ が表す 2 次曲線は無心 2 次曲線である．この 2 次曲線について次の問に答えなさい.

(1) 問題 7.6 の手順を参考に，直交行列による座標変換を用いて方程式の 2 次の項を簡略化しなさい.
(2) (1) の座標変換を施した方程式に対し，1 次の項を消せる場合は座標の平行移動により消しなさい.
(3) この 2 次曲線がどのような形の 2 次曲線か答えなさい.

[*2] `ContourPlot` を使って，*Mathematica* で 2 次曲線を描画してみよう.