問題 7.1.

(1) l' の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，$y = -\dfrac{a}{b}(x - X) + Y$.

(2) 方程式 $\dfrac{b}{a}x = -\dfrac{a}{b}(x - X) + Y$ の解が点 H の x 座標である．H の座標は $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}(aX+bY), \dfrac{b}{a^2+b^2}(aX+bY)\right)$.

(3) 定義にしたがって $|PH|$ を計算すればよい．式変形の過程で

$$bX - aY = \frac{a^2b^2}{bX + aY}$$

を用いるが，これは $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ より，$b^2X^2 - a^2Y^2 = a^2b^2$ の左辺を因数分解した式

$$(bX - aY)(bX + aY) = a^2b^2$$

から得られる．

問題 7.2.

(1) $Y = \dfrac{b}{a}\sqrt{X^2 - a^2}$

(2) $(X, 0)$

(3) $y = m(x - X)$

(4) x に関する 2 次方程式

$$x^2 + m^2(x - X)^2 = a^2$$

が重解を持つときの m の条件を求めればよい．$m = \dfrac{a}{\sqrt{X^2 - a^2}}$.

(5) m が (3) で求めた値のときの 2 次方程式 (4) の解が R の x 座標である．R の座標は $\left(\dfrac{a^2}{X}, \dfrac{a^2}{X}\sqrt{X^2 - 1}\right)$.

(6) $\dfrac{a^2}{X} = a\cos\theta$ より，$X = \dfrac{a}{\cos\theta}$．これを (1) の式に代入すると $Y = b\tan\theta$.

問題 7.3. 行列の計算を実行し，右辺と左辺が等しいことを確かめよ（計算の詳細は省略する）.

問題 7.4.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -6 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

(3) $\Delta = \det(A) = -54$，$\Delta_0 = \det(A_0) = -972$

(4) $\det(A) \neq 0$ より，適当に座標の平行移動をすることにより，$\varphi(x,y) = 0$ は $a\bar{x}^2 + 2h\bar{x}\bar{y} + b\bar{y}^2 + \bar{c} = 0$ と表すことができる．実際に $x = \bar{x} - \dfrac{1}{3}$, $y = \bar{y} - \frac{2}{3}$ とすると，$3\bar{x}^2 - 12\bar{x}\bar{y} - 6\bar{y}^2 + 18 = 0$ となる（定数項は $\det(A_0)/\det(A)$ に等しいことに注意）．

問題 7.5.

(1) $x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$
$\Delta = \dfrac{3}{4} \neq 0$ であるから，有心 2 次曲線である．実際に，$x = \bar{x} - 2$, $y = \bar{y} - 2$ と座標変換すると，$\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ となる．

(2) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$
$\Delta = 0$ であるから，無心 2 次曲線である．実際に，$\varphi(x,y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 5x - 10y + 5$ とおくと，$\varphi(\bar{x} + \lambda, \bar{y} + \mu)$ の 1 次の項は

$$8\left(4\lambda - 3\mu + \frac{5}{8}\right)\bar{x} - 6\left(4\lambda - 3\mu + \frac{5}{3}\right)\bar{y}$$

となり，$\bar{x}, \bar{y}$ の係数がともに 0 となることはない．しかし，

問題 7.6.

(1) $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

(3) $\det(\bar{A}) = -54$, $\det(\bar{A}_0) = -972$.

(4) $\bar{A}$ の固有値は -9 と 6.
-9 に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 6 に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) 例えば，$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

(6) (5) の $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に対して，$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

(7) $-9\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 18 = 0$，つまり，$\dfrac{\tilde{x}^2}{2} - \dfrac{\tilde{y}^2}{3} = 1$ となり，これは双曲線である．

問題 7.7. $\bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2 - 5 = 0$ は座標変換（基底の変換）により，$\dfrac{3}{2}\tilde{x}^2 + \dfrac{1}{2}\tilde{y}^2 = 5$ となる．これは楕円である．

問題 7.8.

(1) 直交行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ と座標変換すると，上の方程式は $-5\bar{x} + 25\bar{y}^2 - 10\bar{y} + 5 = 0$ となる．

(2) (1) の方程式を $\bar{y}$ について平方完成すると，$-5\bar{x} + 25(\bar{y} - \dfrac{1}{5})^2 + 4 = 0$．したがって，$\bar{x} - \dfrac{4}{5} = \tilde{x}$, $\bar{y} - \dfrac{1}{5} = \tilde{y}$ と座標を平行移動すると，$-5\tilde{x} + 25\tilde{y}^2 = 0$ となる．

(3) $\tilde{x} = 5\tilde{y}^2$ であるから，これは放物線である．