固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し，

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}$$

を満たす数 α を $\boldsymbol{A}$ の固有値，$\vec{p}(\neq \vec{0})$ を固有値 $\boldsymbol{\alpha}$ に対する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとよぶ.

- 固有ベクトルは連立方程式 $(\alpha E_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の $\vec{0}$ でない解 (非自明解) である.
- 固有値は $\det(\alpha E_n - A) = 0$ を満たす数である.

固有値，固有ベクトルの求め方

(1) 固有多項式 $f_A(t) = \det(tE_n - A)$ を計算する.

(2) $f_A(t) = 0$ の解 $t = \alpha$ を求める（この解 $\underline{\alpha \text{ が } A \text{ の固有値}}$ である).

(3) (2) で求めた各 α に対し，連立方程式 $(\alpha E_n - A)\vec{x} = \vec{0}$ の非自明解 $\vec{x} = \vec{p}$ を求める（この解 $\underline{\vec{p} \text{ が } A \text{ の固有値 } \alpha \text{ に対する固有ベクトル}}$ である).

問題 6.1. 行列の $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい.

(1) 固有多項式 $f_A(t) = \det(t\,E_2 - A)$ を求めなさい.

(2) 2 次方程式 $f_A(t) = 0$ の解 α を求めなさい.

(3) 各 α に対し，連立方程式 $(\alpha E_2 - A)\vec{x} = \vec{0}$ の解 $\vec{p}_\alpha$ を求めなさい.

(4) 各 α に対し，$A\vec{p}_\alpha = \alpha\vec{p}_\alpha$ が成り立つことを確かめなさい.

問題 6.2. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$