平面の媒介変数表示 (1)

空間内の 3 点 A, B, C（ただし，この 3 点は同一直線上にはないとする）を通る平面を π とする．このとき，平面 π 上の点は P は

$$\vec{p} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \qquad (s, t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ は点 A, B, C, P の位置ベクトルとする．

問題 5.1. 3 点 $(-1, 0, 2), (2, -2, 1), (0, 2, -1)$ を通る平面上の点を (x, y, z) とする．x, y, z を媒介変数 s, t を用いて表しなさい．

平面の媒介変数表示 (2)

点 A を通り，1 次独立なベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ で張られる平面上の点 P は

$$\vec{p} = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v} \qquad (s, t \text{ は実数})$$

と表される．ただし，$\vec{a}, \vec{p}$ は点 A, P の位置ベクトルとする．

問題 5.2. 点 $A(-1, 0, 2)$ を通り，ベクトル $\vec{u} = (3, -2, -1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ で張られる平面上の点を $P(x, y, z)$ とする．x, y, z を媒介変数 s, t を用いて表しなさい．

平面の方程式 (1)

点 A を通り，法線ベクトルが $\vec{n}$ の平面上の点 P とするとき，

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

が成り立つ．ただし，$\vec{a}, \vec{p}$ は点 A, P の位置ベクトルとする．

問題 5.3. 点 $A(-1, 0, 2)$ とベクトル $\vec{u} = (3, -2, -1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ に対して，次の問に答えなさい．

(1) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ とおく．ベクトル $\vec{n}$ を成分表示しなさい．

(2) 点 A を通り，$\vec{n}$ を法線ベクトルする平面上の点を $P(x, y, z)$ とする．このとき，x, y, z が満たす方程式を求めなさい．

平面の方程式 (2)

実数 a, b, c, d に対し，方程式

$$ax + by + cz = d$$

を満たす点 $x, y, z)$ の集合は $\mathbf{R}^3$ 内の平面となる．

問題 **5.4.** 次の 3 式

$$x = -1 + 3s + t, \tag{5.1}$$

$$y = -2s + 2t, \tag{5.2}$$

$$z = 2 - s - 3t \tag{5.3}$$

について，以下の問に答えなさい．

(1) (5.1) 式と (5.2) 式から t を消去し，s を x, y を用いて表しなさい．
(2) (5.1) 式と (5.2) 式から s を消去し，t を x, y を用いて表しなさい．
(3) (1)(2) で求めた s, t の式を (5.3) に代入し，x, y, z の関係式を求めなさい．

例題 **5.5.** 方程式 $y = x + 1$ で表される平面内の直線を l とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換を f_A とする．f_A による l の像（f_A で l を移した図形）がどのような図形か調べなさい．

解. l の定義式において $x = t$ とすると $y = t + 1$ であるから，l 上の点は媒介変数 t を用いて $(t, t+1)$ と表すことができる（直線 l のパラメーター表示）．この点を f_A で線形変換すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に移る．これは点 $(2, -1)$ を通り，方向ベクトルが $(3, 1)$ の直線を表す（これを l' とおく）．ここで，l' の方程式を求めてみよう．l' 上の点を (x, y) とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

つまり $x = 3t + 2$, $y = t - 1$ と書ける．この 2 式から t を消去すると $x - 3y = 5$ を得る．

以上のことから，<u>直線 $\boldsymbol{y = x + 1}$ は線形変換 $\boldsymbol{f_A}$ により直線 $\boldsymbol{x - 3y = 5}$ に移る．</u>

問題 5.6. 2 点 $A(2,3)$, $B(3,1)$ を通る直線を l とし，行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換を f_M とする（つまり，$f_M(\vec{p}) = M\vec{p}$）．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 直線 l 上の点をパラメーター表示しなさい．

(2) 直線 l を f_M で線形変換するとどのような図形になるか調べなさい．また，l の f による像 l' が直線のとき，l' の方向ベクトルを答えなさい．

(3) 2 点 A, B の f による像 $f_M(A)$, $f_M(B)$ を求めなさい．

(4) 2 点 $f_M(A)$, $f_M(B)$ を通る直線を l'' とする．l'' 上の点を (x,y) とし，x と y の関係式（l'' の方程式）を求めなさい．

(5) l' と l'' が同じ直線であることを確かめなさい．

問題 5.7. 2 点 $(-2,0)$, $(2,2)$ を通る直線を l とおく．行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換による l の像がどのような図形になるか調べなさい．