問題 4.1. 座標平面において方程式 $y = 2x^2 + 3x + 1$ を満たす点 (x, y) の集まり（放物線）を $\mathcal{C}$ とする．平行移動 $f(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{d}$ により，$\mathcal{C}$ を変換した図形の方程式が $y = ax^2$ になった．このとき，ベクトル $\vec{d}$ と定数 a を求めなさい．

問題 4.2. f を行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ に対して $f(\vec{p}) = A\vec{p}$ で定義される線形変換とする．また，方程式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たす点 (x, y) の集まりを $\mathcal{C}$ とする．このとき，$\mathcal{C}$ を f で変換した図形の方程式を求めなさい．

問題 4.3 (合成変換)**.** 正方行列 A_1, A_2 とベクトル $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ に対し，アフィン変換 f, g を

$$f(\vec{p}) = A_1\vec{p} + \vec{d_1}, \qquad g(\vec{p}) = A_2\vec{p} + \vec{d_2}$$

と定義する．このとき，合成変換 $f \circ g$ および $g \circ f$ を $A_1, A_2, \vec{d_1}, \vec{d_2}$ を用いて表しなさい．

問題 4.4 (逆変換)**.** 正方行列 A とベクトル $\vec{d}$ を用いて

$$f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{d}$$

と定義されるアフィン変換 f が全単射のとき，f の逆変換 f^{-1} を $A, \vec{d}$ を用いて表しなさい．

□ 平面における主な線形変換

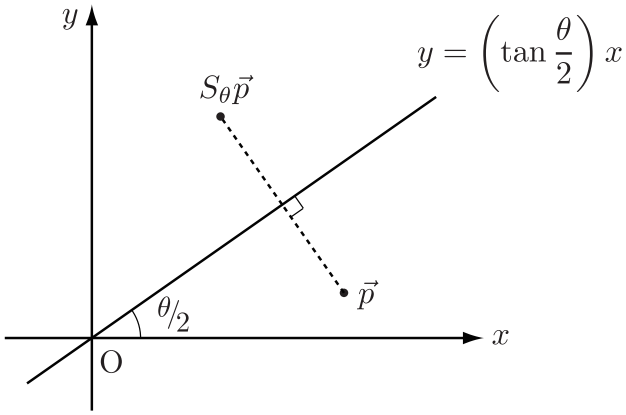
(1) 拡大と縮小，相似変換

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} k > 1 \text{ のとき，} x \text{ 軸方向の拡大} \\ 0 < k < 1 \text{ のとき，} x \text{ 軸方向の縮小} \\ k < 0 \text{ のとき，} x \text{ 軸方向に “裏返して” 拡大，縮小} \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $\begin{cases} k > 1 \text{ のとき，} y \text{ 軸方向の拡大} \\ 0 < k < 1 \text{ のとき，} y \text{ 軸方向の縮小} \\ k < 0 \text{ のとき，} y \text{ 軸方向に “裏返して” 拡大，縮小} \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $\begin{cases} |k| > 1 \text{ のとき，相似拡大} \\ 0 < |k| < 1 \text{ のとき，相似縮小} \end{cases}$

(2) せん断：$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

(3) 原点を中心とする回転変換：$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(4) 直線 $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)x$ に関する対称移動：$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$



問題 4.5. 行列 S_θ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\vec{p} = (x, y)$ とおき，$S_\theta\vec{p}$ を成分表示しなさい．

(2) ベクトル $(\vec{p} - S_\theta\vec{p})$ とベクトル $(1, \tan\frac{\theta}{2})$ が直交することを示しなさい．

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $S_\theta\vec{p}$ の中点 $\dfrac{1}{2}(\vec{p} + S_\theta\vec{p})$ が直線 $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ 上の点であることを示しなさい．

(4) S_θ が直交行列であることを示しなさい．

(5) S_θ の行列式を求めなさい．

問題 4.6. 行列 R_θ，S_θ，$B = S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形変換をそれぞれ f_θ，g_θ，h とする．つまり，$_\theta(\vec{p}) = R_\theta\vec{p}$, $g_\theta(\vec{p}) = S_\theta\vec{p}$, $h(\vec{p}) = B\vec{p}$. このとき，次の問に答えなさい．

(1) $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$ を示しなさい．

(2) $g_\theta \circ g_\varphi = f_{\theta-\varphi}$ を示しなさい．

(3) $f_\theta^{-1} = f_{-\theta}$ を示しなさい．

(4) $g_\theta^{-1} = g_\theta$ を示しなさい．

(5) h はある直線に関する対称移動である．どういう直線か説明しなさい．

(6) $f_\theta = g_\theta \circ h$ を示しなさい．

□ 空間における主な線形変換

(1) 拡大・縮小，相似変換

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

(2) せん断

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 回転変換

- z 軸を回転軸とする回転；$R_{z(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- x 軸を回転軸とする回転；$R_{x(\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- y 軸を回転軸とする回転；$R_{y(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$
- 原点を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = (a, b, c)$ の直線を回転軸とする回転；

$R_{(a,b,c;\theta)}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ca + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ca - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(4) 平面 $ax+by+cz = 0$ に関する鏡映変換：$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$

ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

問題 4.7. 空間における回転行列 $R_{x(\theta)}, R_{y(\theta)}, R_{z(\theta)}, R_{(a,b,c;\theta)}$ について，

$$R_{(1,0,0;\theta)} = R_{x(\theta)}, \quad R_{(0,1,0;\theta)} = R_{y(\theta)}, \quad R_{(0,0,1;\theta)} = R_{z(\theta)}$$

が成り立つことを示しなさい.

問題 4.8 (対称移動を理解するための問題)**.** 行列

$$S_{(a,b,c)} = \begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$$

（ただし，$a^2+b^2+c^2=1$）について，以下の問に答えなさい.

(1) $\vec{p} = (x,y,z)$ とおき，$S_{(a,b,c)}\vec{p}$ を成分表示しなさい.

(2) ベクトル $(\vec{p} - S_{(a,b,c)}\vec{p})$ がベクトル (a,b,c) と平行であることを確かめなさい.

(3) 点 $\vec{p}$ と点 $S_{(a,b,c)}\vec{p}$ の中点 $\dfrac{1}{2}\left(\vec{p} + S_{(a,b,c)}\vec{p}\right)$ が平面 $ax+by+cz=0$ 上の点であることを確かめなさい.

(4) $S_{(a,b,c)}$ が直交行列であることを示しなさい.

(5) $S_{(a,b,c)}$ の行列式を求めなさい.