問題 4.1. $y = ax^2$ を x 軸正方向に b だけ，y 軸正方向に c だけ平行移動（つまり $f(\vec{p}) = \vec{p} + (b, c)$）した放物線の方程式は $y = a(x-b)^2 + c$ であった．

$\mathcal{C}$ の方程式は $y = 2x^2 + 3x + 1 = 2(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{1}{8}$ と式変形できるので，これは $y = 2x^2$ を x 軸正方向に $-\frac{3}{4}$，y 軸正方向に $-\frac{1}{8}$ だけ平行移動したものである．したがって，$\mathcal{C}$ を x 軸正方向に $\frac{3}{4}$，y 軸正方向に $\frac{1}{8}$ だけ平行すれば $y = 2x^2$ となる．$\underline{\text{解は } a = 2,\ \vec{d} = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{8})}$.

問題 4.2. $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$f(\vec{p}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおく．つまり，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$．求めるものは x, y が方程式 $x^2 - y^2 = 1$ を満たすとき，x', y' の満たす方程式である．上の関係式から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{pmatrix}$，つまり，$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$ を $x^2 - y^2 = 1$ に代入すると，$x'y' = 1$ となる．

以上のことから，$x^2 - y^2 = 1$ を f で移した図形の方程式は $\underline{xy = 1}$ である．

問題 4.3. 定義にしたがって，計算すればよい．

$$f \circ g(\vec{p}) = f(g(\vec{p})) = A_1 g(\vec{p}) + \vec{d_1} = A_1(A_2\vec{p} + \vec{d_2}) + \vec{d_1} = \underline{(A_1A_2)\vec{p} + (A_1\vec{d_2} + \vec{d_1})}.$$

同様に $g \circ f(\vec{p}) = \underline{(A_2A_1)\vec{p} + (A_2\vec{d_1} + \vec{d_2})}$.

問題 4.4. f の逆変換を $f^{-1}(\vec{p}) = B\vec{p} + \vec{e}$ とおく．問題 4.3 の結果から $f \circ f^{-1}(\vec{p}) = (AB)\vec{p} + A\vec{e} + \vec{d}$．しかし，$f \circ f^{-1}(\vec{p}) = \vec{p}$ だから，任意のベクトル $\vec{p}$ に対して，

$$(AB)\vec{p} + A\vec{e} + \vec{d} = \vec{p}$$

が成り立つ．したがって，$\underline{B = A^{-1},\ \vec{e} = -A^{-1}\vec{d}}$.

問題 4.5. 直線 $y = (\tan\frac{\theta}{2})x$ に関する対称移動について理解するための問題である．小問を順に解き（と言っても指示通り計算するだけ)，対称移動の定義を確認せよ．

(1) $S_\theta \vec{p} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 内積 $(\vec{p} - S_\theta\vec{p}, (1, \tan\frac{\theta}{2})) = 0$ となることを計算して示せ．

(3) ただの計算．

(4) $\det S_\theta = -1$

問題 4.6. 5 月 31 日の講義を参考にせよ．（詳細は省略）