問題 3.1. 次の行列 A, B に対して，(i) ${}^t\!A$，(ii) ${}^t\!B$，(iii) AB，(iv) ${}^t(AB)$，(v) ${}^t\!B\,{}^t\!A$ を計算しなさい[*1].

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 3.2. 次の問に答えなさい.

(1) 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対し，ベクトルの長さ $\|\boldsymbol{a}\|^2$, $\|\boldsymbol{b}\|^2$, $\|\boldsymbol{c}\|^2$，および内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ を計算しなさい.

(a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) 次の行列 A に対し[*2]，行列の積 ${}^t\!A\,A$ を求めなさい.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) (1) で計算した値と，(2) で求めた行列の成分を比較し，

$$
{}^t\!A\,A = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{a}\|^2 & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \|\boldsymbol{b}\|^2 & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & \|\boldsymbol{c}\|^2 \end{pmatrix}
$$

が成り立っていることを確かめなさい.

[*1] 一般に ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$ が成り立つ.

[*2] (2) の行列 A は (1) のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を並べてできる行列である.

問題 **3.3.** 次の行列 A が直交行列であることを示しなさい．また，A の行列式を求めなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ac + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ac - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$

ただし，a, b, c は $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数．