問題 3.1. 一般に ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ が成り立つことを確かめるための問題．AB の計算結果だけ述べる．

(1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 11 & -1 & 7 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 10 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

問題 3.2. 行列の積の成分がベクトルの内積であることを確かめる問題．${}^tA \cdot A$ の計算結果だけ述べる．

(a) ${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 30 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　(b) ${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 13 & -4 \\ 13 & 27 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

問題 3.3. $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E_3$ となることを計算して示せばよい．

行列式の値は (1) -1，(2) 1，(3) 1 となる．

（(3) の行列について）a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)a^2 & (1-\cos\theta)ab - c\sin\theta & (1-\cos\theta)ac + b\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ab + c\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)b^2 & (1-\cos\theta)bc - a\sin\theta \\ (1-\cos\theta)ac - b\sin\theta & (1-\cos\theta)bc + a\sin\theta & \cos\theta + (1-\cos\theta)c^2 \end{pmatrix}$$

とおく．この行列が直交行列であることを示そう．ここで，

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

とおくと $A = \cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C$ となる．また，B は交代行列[*1]，C は対称行列[*2]であり，さらに

$$B^2 = C - E_3, \qquad BC = CB = O, \qquad C^2 = C$$

[*1] ${}^tB = -B$ が成り立つ．

[*2] ${}^tC = C$ が成り立つ．

を満たす（計算して確かめよ）．以上の性質を使って，${}^{t}A\,A$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
{}^{t}AA =& {}^{t}(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C)\,(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
=& (\cos\theta\,{}^{t}E_3 + \sin\theta\,{}^{t}B + (1-\cos\theta)\,{}^{t}C)\,(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
=& (\cos\theta E_3 - \sin\theta B + (1-\cos\theta)C)\,(\cos\theta E_3 + \sin\theta B + (1-\cos\theta)C) \\
=& \cos^2\theta E_3 + \cos\theta\sin\theta B + \cos\theta(1-\cos\theta)C \\
& - \sin\theta\cos\theta B - \sin^2\theta B^2 - \sin\theta(1-\cos\theta)BC \\
& + \cos\theta(1-\cos\theta)C + (1-\cos\theta)\sin\theta CB + (1-\cos\theta)^2C^2 \\
=& \cos^2\theta E_3 + 2\cos\theta(1-\cos\theta)C - \sin^2\theta(C-E_3) + (1-\cos\theta)^2C \\
=& (\cos^2\theta + \sin^2\theta)E_3 + \left\{2\cos\theta(1-\cos\theta) - \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2\right\}C = \underline{E_3}
\end{aligned}
$$

となる．