問題 2.1. $y = 2x^2 + 3x + 1$ の右辺を平方完成すると $y = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ となるので，

$$x + \frac{3}{4} = X, \quad y + \frac{1}{8} = Y$$

と原点を移動すれば，$Y = 2X^2$ となる．

問題 2.2.

(1) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の単位点をそれぞれ E_1, E_2 とする．つまり，$\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$，$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$．さらに，$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ を原点を中心に回転したベクトル $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ に対し，点 E'_1, E'_2 を $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{OE'_1}$，$\vec{e}'_2 = \overrightarrow{OE'_2}$ となるように定める（下図を参照）．点 E_1, E_2, E'_1, E'_2 は原点を中心とする円周上にあり，下図のように $\angle E_1OE'_1 = \angle E_2OE'_2 = \frac{\pi}{4}$ であるから，三角関数の定義から，

$$E'_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$E'_2 = \left(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

したがって，

$$\vec{e}'_1 = \overrightarrow{OE'_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}'_2 = \overrightarrow{OE'_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2.$$

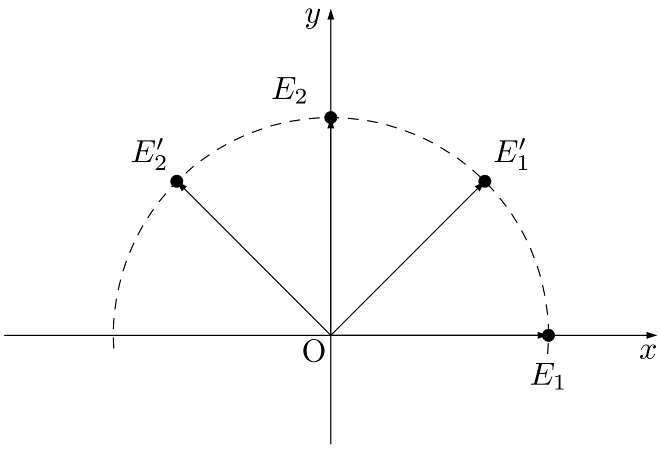
または

$$(\vec{e}'_1\ \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)A, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(2) 基底の変換行列が上の A でるとき，上記のように変換されるとき，$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (x, y) と $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 座標系の座標 (X, Y) との関係は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad \text{つまり} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入すると $\underline{XY = -\frac{1}{2}}$ となる．



y
E_2
E'_2
E'_1
O
x
E_1