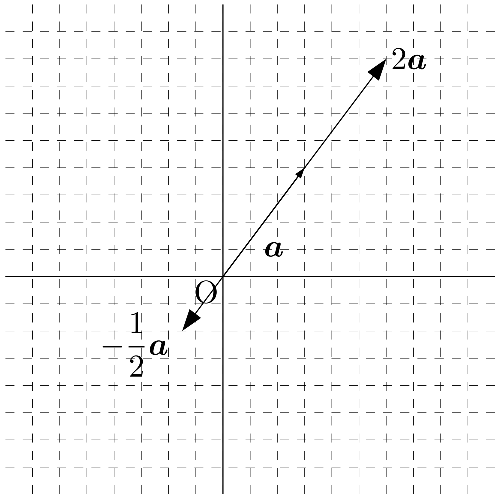
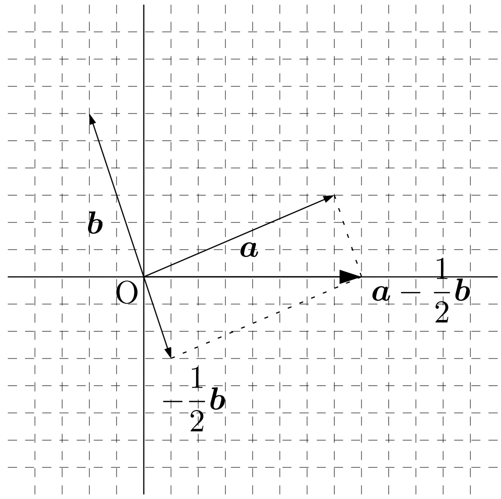
情報数学 **III** — 演習問題（ベクトル）　解答　　　　（担当：佐藤 弘康）

問題 1.1.

(1)



(2)



問題 1.2.

(1) $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-2,-1) + (1,-2) = \underline{(-1,-3)}$. $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+9} = \underline{\sqrt{10}}$.

(2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a} = (1,-2) + (6,3) = \underline{(7,1)}$. $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{49+1} = \underline{\sqrt{50}}$.

(3) $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (4,2) + (-1,2) = \underline{(3,4)}$. $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{5}$.

問題 1.3. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と実数 c に対し，$\|c\,\boldsymbol{a}\| = \|c\| \cdot |\boldsymbol{a}|$ が成り立つ．例えば，平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ に対しては，以下のように確かめられる；

$$\|c\,\boldsymbol{a}\| = |(ca_1, ca_2)| = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2} = |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |c| \cdot \|\boldsymbol{a}\|.$$

ここで，$|c|$ は実数の絶対値を表し，$|\boldsymbol{a}|$ はベクトルの長さを表すことに注意せよ．したがって，$\|c\boldsymbol{a}\| = 1$ となるためには $c = \pm\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}$ とすればよい．

(1) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$．したがって，$c = \underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{34}}}$.

(2) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$．したがって，$c = \underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

(3) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4} = \sqrt{\dfrac{17}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$．したがって，$c = \underline{\pm\dfrac{2}{\sqrt{17}}}$.

(4) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$．したがって，$c = \underline{\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$.

問題 1.4. (iii) $\cos\theta$ の値は内積の定義（性質）$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,\cos\theta$ を用いて求める．

(1) (i) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+3} = 2, \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4+12} = 4$，(ii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -2+6 = 4$，(iii) $\cos\theta = \dfrac{4}{2\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$ （$\theta = \frac{\pi}{3}$ である）．

(2) $\boldsymbol{u} = (5,3)+(-4,0) = (1,3)$，$\boldsymbol{v} = (-5,-3)+(14,0) = (9,-3)$．(i) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$，(ii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 9-9 = 4$，(iii) $\cos\theta = \dfrac{0}{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}} = 0$ （$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交する）．

(3) $\boldsymbol{u} = (4,0,2)+(-1,1,-3) = (3,1-1)$，$\boldsymbol{v} = (-4,0,-2)+(-1,1,-3) = (-5,1-5)$．(i) $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}, \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{25+1+25} = \sqrt{51}$，(ii) $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -15+1+5 = -11$，(iii) $\cos\theta = \dfrac{-11}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{51}} = -\dfrac{11}{\sqrt{561}}$ （$\cos\theta < 0$ より，θ は鈍角であるこがわかる）．

問題 1.5. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ を満たす c を求める．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3-2c-c = 3-3c$ より，$\underline{c=1}$．

問題 1.6. 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ および $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \cdot\boldsymbol{b})$ は共に 0 である．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (1,-5,-2)$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-3,-3,1)$

問題 1.7. 空間ベクトルの外積は一般に結合法則を満たさないので (1) と (2) の計算結果は異なる．しかし，一般に $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \underline{(5,5,-5)}$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \underline{(-11,-2,5)}$

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \underline{(5,5,-5)}$

問題 1.8. 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する．したがって，求めるベクトルは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ に平行な単位ベクトルである（問題 1.3 を参照）．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (1,2,-3)$，$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$．したがって，求めるベクトルは $\underline{\pm(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})}$．

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-2,-5,6)$，$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{4+25+36} = \sqrt{65}$．したがって，求めるベクトルは $\underline{\pm(\frac{2}{\sqrt{65}}, \frac{5}{\sqrt{65}}, -\frac{6}{\sqrt{65}})}$．

問題 1.9. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．このとき，三角形 OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$$

と書ける（ただし，$\theta = \angle \mathrm{AOB}, 0 \le \theta \le \pi$）．$\sin\theta \ge 0$ であるから，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ と書きなおすと

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta} \end{aligned}$$

となる．内積の定義 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ を代入することにより，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$ を得る．

問題 1.10. 問題 **1.9** より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は $\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\,\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}$ に等しい (三角形の面積の 2 倍)．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示し，$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2$ と $\|\boldsymbol{a}\|^2\,|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2$ を計算し，等しくなることを示せばよい（計算の詳細は省略）．